

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Aplicações não lineares em modelos de calços elastoméricos

Rafael Penas da Silva

São Paulo
2017

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Aplicações não lineares em modelos de calços elastoméricos

Trabalho de formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo para
a obtenção do título de Graduação em Enge-
nharia

Rafael Penas da Silva

Orientador: Marcelo A. L. Alves

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

São Paulo

2017

Catálogo-na-publicação

da Silva, Rafael Penas

Aplicações não lineares em modelos de calços elastoméricos / R. P. da Silva -- São Paulo, 2017.

56 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Elementos finitos 2.Hiperelasticidade I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a viabilidade da implementação de rotinas não lineares dentro do software SDTools para a simulação de calços elastoméricos. Como se trata de um trabalho inicial, em primeiro lugar foi definida uma lei de não linearidade já conhecida e simples, e então, a partir de sua devida implementação no programa, foram realizadas análises para avaliar o comportamento do modelo sob diferentes carregamentos. Ainda sobre o modelo hiperelástico, foram realizados estudos sobre a estabilidade do modelo e sobre a possibilidade do uso de técnicas de hiper redução. A continuidade desse trabalho se deu com a introdução do modelo não linear dentro de um sistema completo, onde foram trabalhados os problemas de validação e de identificação de parâmetros, além da interpretação dos elementos não lineares a partir de conceitos modais.

Abstract

The main goal of the present work is to study the viability of the implementation of non linear routines in the SDTools software for simulating non linear elastomer mounts. Since it is a first work in this field inside the context of SDTools, a simple and known model of hyperelasticity was chosen and implemented, and with this model, analysis to identify its behavior under different loading conditions were made. Still on the hyperelastic model, the model's stability and the possibility of the application of hyper reduction techniques were studied. The work followed with the modelling of a complete system with the non linear model as a component. In the system model, the identification and the validation problems were addressed, along with the usage of modal concepts.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Calços elastoméricos aplicados em trilhos e sistemas de suspensão. Fonte: Bourgeteau, 2009, Arlaud, 2016	9
Figura 2	– Comportamento não linear de calços elastoméricos em relação à amplitude de deformação. Fonte: Bourgeteau, 2009	10
Figura 3	– Valores de energia para $K = 10^6 Pa$ e $K = 10^7 Pa$ respectivamente	20
Figura 4	– Evolução dos invariantes	21
Figura 5	– Derivadas dos invariantes para $K = 10^6 Pa$ e $K = 10^7 Pa$	21
Figura 6	– Componentes da rigidez tangente para $K = 10^6 Pa$ e $K = 10^7 Pa$	22
Figura 7	– Modelo RubMount	22
Figura 8	– Instabilidade no modelo RubMount	23
Figura 9	– Estabilidade em função dos invariantes para gradientes de deformação aleatórios	24
Figura 10	– Região de estabilidade calculada por interpolação	25
Figura 11	– Menores autovalores e esforços internos para um ponto de Gauss específico	25
Figura 12	– Efeito de Poisson negativo no modelo RubMount	26
Figura 13	– Campos de autovalores das matrizes de rigidez do modelo RubMount	26
Figura 14	– Amplitude dos valores singulares para o primeiro invariante do modelo RubMount	27
Figura 15	– Formas singulares do primeiro invariante para o modelo RubMount	27
Figura 16	– Correlação entre as formas singulares do primeiro invariante para diferentes amplitudes	28
Figura 17	– Rigidez e força calculados para um deslocamento senoidal	29
Figura 18	– Comparação da relação força/deslocamento para os modelos de Saint-Venant-Kirchhoff e Mooney-Rivlin para o modelo RubMount	30
Figura 19	– Modelo reológico de Maxwell	31
Figura 20	– Modelo reológico de Kelvin-Voigt	31
Figura 21	– Modelo reológico de amortecimento material	32
Figura 22	– Modelo reológico do sólido viscoelástico padrão	32
Figura 23	– Modelo reológico da cadeia de Kelvin	33
Figura 24	– Modelo reológico generalizado de Maxwell	33
Figura 25	– Barra com rótula. FONTE: Hammami, 2014	37
Figura 26	– Modelos desenhados para a análise não linear	38
Figura 27	– Modos do modelo BeamPBush	39
Figura 28	– Resposta em frequência do modelo linear BeamPBush	39
Figura 29	– Correlação entre os modos dos modelos BeamPBush e BeamPVol	40
Figura 30	– Resposta temporal do deslocamento na extremidade do calço	41
Figura 31	– Diagramas de fase das amplitudes modais do modelo BeamPBush	41
Figura 32	– Comparação entre o cálculo completo e o cálculo com redução modal para o modelo BeamPBush não linear	42
Figura 33	– FFT das amplitudes modais da resposta do modelo BeamPBush	43
Figura 34	– Energias modais do modelo BeamPBush no tempo	43
Figura 35	– FFT das energias modais do modelo BeamPBush	44
Figura 36	– Amplitudes modais em frequência para o modelo BeamPBush amortecido	45
Figura 37	– Resposta temporal da energia para o modelo BeamPBush amortecido	45
Figura 38	– Amplitudes modais no tempo para o modelo BeamPBush	46

Figura 39 – Espectrogramas da resposta do modelo BeamPBush	46
Figura 40 – Resposta temporal do modelo BeamPBush para frequências e amplitudes diferentes	47
Figura 41 – Variação da frequência do nono modo com o aumento da amplitude	47
Figura 42 – Resposta harmônica do modelo BeamPBush para diferentes amplitudes	48
Figura 43 – Resposta harmônica do modelo BeamPBush para diferentes valores do coeficiente cúbico	48
Figura 44 – Regressão quadrática da relação de força/deslocamento do modelo volumétrico	49
Figura 45 – Comparação entre os esforços resultantes dos modelos BeamPBush e BeamPVol , nos domínios do tempo e da frequência	50
Figura 46 – Resposta da vigésima quarta amplitude modal	50
Figura 47 – Modos presentes na resposta do modelo BeamPVol e ausentes na resposta do modelo BeamPBush	51
Figura 48 – Condições iniciais para o procedimento de otimização	52
Figura 49 – Primeiro e último passos da identificação de parâmetros	52

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Parâmetros de Mooney-Rivlin para o primeiro exemplo	20
Tabela 2	–	Parâmetros de Mooney-Rivlin para o modelo volumétrico	23
Tabela 3	–	Dimensão do subespaço de cada componente do modelo	28

Sumário

Lista de ilustrações	5
Lista de tabelas	7
Sumário	8
1 Introdução	9
2 Modelo Local	12
2.1 Hiperelasticidade e grandes transformações	12
2.1.1 Definição	12
2.1.2 Lei constitutiva - Modelo de Mooney-Rivlin	13
2.1.3 Linearização para as configurações de referência e deformada	14
2.1.4 Termos para o solver numérico	16
2.1.5 Exemplos de verificação	16
2.1.6 Exemplo com mais de um elemento	19
2.2 Caso de aplicação : massa rígida e modelo em volume de um calço	21
2.2.1 Detalhes do modelo	22
2.2.2 Estabilidade	23
2.2.3 Análise de redução	25
2.2.4 Influência do comportamento material	28
2.3 Implementações futuras	29
2.3.1 Elementos viscosos	30
2.3.2 Modelos reológicos	31
2.3.3 Modelos volumétricos de viscoelasticidade	34
2.3.4 Fatores ambientais	35
3 Modelo Sistema	37
3.1 Desenho de um sistema para testes	37
3.1.1 Modelo realizado	37
3.1.2 Resposta linear	38
3.2 Análises de resposta não linear	40
3.2.1 Amplitudes modais	40
3.2.2 Energias modais	42
3.2.3 Amortecimento modal	43
3.2.4 Resultados do método do balanço harmônico	45
3.3 Modelo volumétrico e metamodelos	48
3.3.1 Identificação de metamodelo	48
3.3.2 Identificação de parâmetros	49
4 Conclusão	53
Referências	54

1 Introdução

Calços elastoméricos são usados em diversas aplicações industriais. Na indústria automotiva, eles possuem um papel importante no comportamento dinâmico global de um veículo (BOURGETEAU, 2009), devido à sua baixa rigidez em relação aos outros componentes e à sua capacidade de absorver energia de vibrações. Suas diversas aplicações em um sistema de suspensão automotiva são mostradas na figura 1. Na indústria aeroespacial, esse material é utilizado para o isolamento de diversos componentes de satélites (JAUMOUILLE, 2011). Na indústria aeronáutica, estuda-se sua aplicação para o isolar as asas das vibrações do motor, com o desafio de transmitir elevadas cargas estáticas (VINCENT, 2011). Na indústria ferroviária, calços de borracha são os componentes mais utilizados para distribuir os esforços dos trilhos para os dormentes (ARLAUD, 2016), como mostra a figura 1.

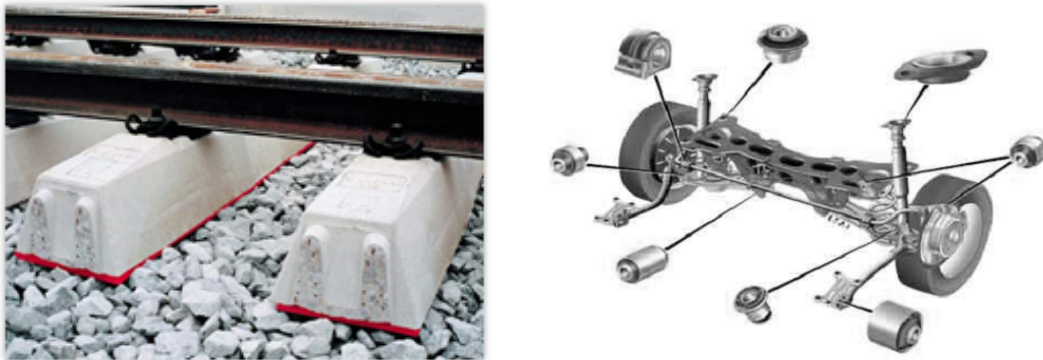


Figura 1 – Calços elastoméricos aplicados em trilhos e sistemas de suspensão. Fonte: Bourgeteau, 2009, Arlaud, 2016

Os mecanismos do comportamento dos calços são conhecidos: viscoelasticidade e histerese devem ser modeladas para representar a dissipação. Efeitos importantes, como o efeito Mullins (evolução das propriedades com os primeiros ciclos de carga) e Payne (perda de rigidez em altas amplitudes de vibração) (JAUMOUILLE; SINOUE; PETITJEAN, 2010) ainda são assuntos de pesquisa no mundo acadêmico, tanto em termos de modelagem quanto de caracterização.

Uma das dificuldades encontradas é o fato de que dois tipos de modelos fundamentalmente diferentes são frequentemente utilizados. Modelos materiais devem incluir efeitos não lineares em amplitude, frequência e temperatura, que incluem também o uso de variáveis internas. Além disso, deve-se levar em conta para esse tipo de modelo os efeitos não lineares de grandes deformações. Devido a essa alta complexidade, estudos de design baseados nesses modelos ainda não são acessíveis para a indústria, apesar dessa perspectiva estar se abrindo com a utilização de técnicas modernas de redução de modelos (RYCKELYNCK; BENZIANE, 2010).

Por essa razão, para simulações em nível sistema, modelos do tipo mola-amortecedor não linear são identificados e utilizados (BOURGETEAU, 2009). A escolha do tipo de

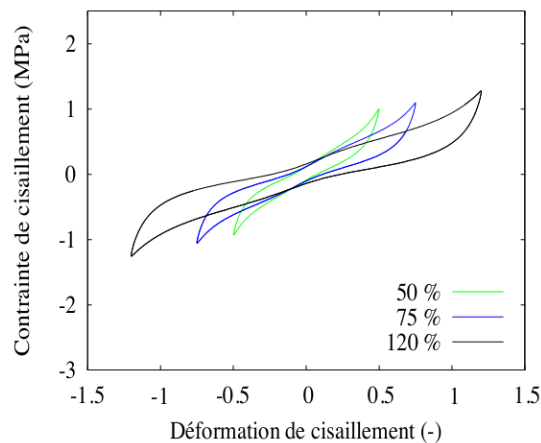


Figura 2 – Comportamento não linear de calços elastoméricos em relação à amplitude de deformação. Fonte: Bourgeteau, 2009

não linearidade para esses modelos é delicada. Modelos que representam bem a realidade tipicamente utilizam estados internos que diferem completamente de um modelo material, visto que num modelo tipo mola-amortecedor, não se podem separar os efeitos materiais dos espaciais. A escolha do modelo e a definição de uma estratégia de identificação ainda é um problema aberto. Neste trabalho, este tipo de modelo uniaxial será chamado de metamodelo para esclarecer que são modelos empíricos e não de materiais.

A integração de representações não lineares dentro de solvers em nível sistema ainda impõe mais uma dificuldade: respostas transientes a choques e respostas harmônicas não lineares, por exemplo, se tornam extremamente custosas numericamente quando o sistema completo (carro, trilho, motor, satélite, etc.) possui milhões de graus de liberdade. Outra grande limitação desse tipo de modelo é que sua identificação negligencia os efeitos de acoplamento, dado que o número de ensaios para a identificação desses termos em todas as direções é claramente muito maior do que para um modelo uniaxial.

Dentro deste contexto desafiador, o objetivo deste trabalho é garantir a disponibilidade de ferramentas numéricas e a habilidade de manejá-las de maneira flexível, para garantir que futuros trabalhos sejam realizados com chances reais de sucesso.

O capítulo 2 procura validar procedimentos para lidar com modelos materiais 3D. O principal ponto dessa parte é validar a capacidade de utilizar um material não linear, combiná-lo com efeitos não lineares de geometria, resultando em respostas adequadas para o nível sistema. Como o objetivo não é inovar nas escolhas de material, mas sim, confirmar a capacidade de simular e diagnosticar problemas, as aplicações são limitadas a hiperelasticidade, cujos modelos simples possuem patologias numéricas conhecidas. A implementação numérica é validada em primeiro lugar, então a estabilidade do modelo tridimensional é estudada. Finalmente a possibilidade de redução é analisada e os efeitos de geometria e de material são comparados.

No capítulo 3, simulações em nível sistema são estudadas. Como base, um simples modelo que permitiria a caracterização de um calço é desenhado para as simulações e poderia ser utilizado experimentalmente. São realizadas análises lineares, verificação da possibilidade de redução de ordem, além da visualização da resposta transitória de modelos

paramétricos. A comparação de metamodelos e do modelo volumétrico é realizada, além de utilizar essa comparação para analisar os problemas de identificação e validação.

Finalmente, o capítulo 4 conclui o trabalho e relata as perspectivas para os futuros trabalhos.

2 Modelo Local

Neste capítulo serão tratados os problemas relativos à análise e à simulação de calços elastoméricos em sua formulação volumétrica. Esses modelos têm de considerar os comportamentos não lineares material e geométrico, associados a grandes deformações, dado que elas chegam frequentemente a 30% para esse tipo de componente, e casos onde a deformação chega a 100% são razoavelmente comuns ([BOURGTEAU, 2009](#)).

Para demonstrar a capacidade de lidar com esse tipo de problema, além de verificar o desempenho do software, foi considerado suficiente para o trabalho analisar o caso de hiperelasticidade e grandes deformações.

A seção [2.1](#) sumariza as principais equações e os passos de validação da nova implementação de não linearidades materiais para volumes dentro da arquitetura do software SDTools ([BALMES, 2017](#)).

A seção [2.2](#) descreve o primeiro exemplo de aplicação da implementação, utilizando ferramentas de pós processamento desenvolvidas, tanto para diagnosticar problemas de instabilidade encontrados, quanto para verificar a possibilidade de uma redução do modelo. No final da seção, o impacto da não linearidade material é medido ao comparar os resultados de suas simulações ao de seu material elástico equivalente, porém sujeito à formulação de grandes deformações.

A seção [2.3](#) descreve os comportamentos que materiais elastoméricos apresentam, porém não foram implementados neste trabalho. O principal efeito descrito é a viscoelasticidade em formulação reológica e volumétrica. Efeitos da temperatura e da amplitude também são descritos.

2.1 Hiperelasticidade e grandes transformações

Nesta seção, o caso mais básico dos comportamentos não lineares em um problema estrutural - a hiperelasticidade - é analisado.

Primeiramente, o conceito é desenvolvido, e então a lei constitutiva é derivada para o caso do material de Mooney-Rivlin, e por fim, casos teste são apresentados, bem como sua implementação no software.

2.1.1 Definição

Um material hiperelástico é um material cuja lei constitutiva é definida por um potencial de energia ([ANSYS, 2017](#)). Dado que ainda estamos no domínio da elasticidade, deve-se lembrar que apesar do fato que há um grau de não linearidade, todas as deformações são reversíveis, logo não é necessário o histórico dos carregamentos do material para estabelecer sua lei constitutiva instantânea, logo, as análises temporais podem ser realizadas como se fossem análises quase estáticas. A teoria hiperelástica considera não linearidades advindas de dois mecanismos diferentes ([BOWER, 2009](#)):

- Geométrica: A hiperelasticidade se manifesta sob grandes deformações, o que significa que a teoria de pequenos deslocamentos não é mais válida, devido aos termos que

não são mais desprezíveis

- Material: Existem diversos modelos para a equação de energia potencial hiperelástica (BOULANGER; HAYES, 2001), e são geralmente funções dos invariantes do tensor de deformações ou das deformações principais. Quando as derivadas dessa energia não são lineares, então, o material também se comporta de maneira não linear.

As principais aplicações dessa teoria são a modelagem do comportamento de elastômeros e de espumas poliméricas que podem apresentar grandes mudanças de forma reversíveis (como uma esponja, por exemplo) (BOWER, 2009).

2.1.2 Lei constitutiva - Modelo de Mooney-Rivlin

Antes de definir e derivar a lei constitutiva do material, alguns conceitos auxiliares devem ser definidos, começando pelo tensor de deformações direito de Cauchy-Green C

$$C = F^T F, \quad (2.1)$$

que é baseado no tensor gradiente de deformações F

$$F_{ij} = I_{ij} + \nabla_j u_i. \quad (2.2)$$

Entre diversos modelos de hiperelasticidade, o modelo tratado nesta seção é o de Mooney-Rivlin, que é uma descrição fenomenológica da relação tensão/deformação geralmente respeitada por materiais similares à borrachas. Neste modelo, a energia livre é descrita por

$$W = C_1(J_1 - 3) + C_2(J_2 - 3) + \alpha(J_3), \quad (2.3)$$

Onde J_i são as formas reduzidas dos invariantes I_i do tensor direito de Cauchy-Green (equações 2.4 e 2.5) e α é uma função não linear de J_3 . Alguns modelos hiperelásticos diferem apenas por esse termo (SCHRODER; NEFF, 2003). C_1 e C_2 são parâmetros do material. É importante frisar que o termo J_3 corresponde à variação de volume do ponto.

$$J_1 = I_1 I_3^{-1/3} \quad J_2 = I_2 I_3^{-2/3} \quad J_3 = I_3^{1/2} \quad (2.4)$$

$$I_1 = \text{tr}(C) \quad I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{tr}(C))^2 - \text{tr}(C^2) \right] \quad I_3 = \det(C). \quad (2.5)$$

Antes de derivar a função de energia, o termo α deve ser definido. Neste trabalho, a expressão de Mooney-Rivlin mais simples é usada,

$$\alpha(J_3) = K(J_3 - 1)^2, \quad (2.6)$$

sendo K o terceiro parâmetro material do modelo.

Derivando-se a expressão de energia livre, podemos obter o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff,

$$S = 2 \frac{\partial W}{\partial C} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial C} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial C} \right), \quad (2.7)$$

onde cada derivada em relação a C também deve ser calculada,

$$\frac{\partial I_1}{\partial C} = I \quad \frac{\partial I_2}{\partial C} = I_1 I - C \quad \frac{\partial I_3}{\partial C} = \text{adj}^T(C), \quad (2.8)$$

e em relação aos invariantes I ,

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 I_3^{-\frac{1}{3}} \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = C_2 I_3^{-\frac{2}{3}} \quad \frac{\partial W}{\partial I_3} = -\frac{1}{3} C_1 I_1 I_3^{-\frac{4}{3}} - \frac{2}{3} C_2 I_2 I_3^{-\frac{5}{3}} + \frac{\partial \alpha}{\partial I_3}, \quad (2.9)$$

e em relação a α ,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial I_3} = K(1 - I_3^{-\frac{2}{3}}). \quad (2.10)$$

Finalmente, o tensor de tensões de Cauchy (equivalente ao tensor de tensões linearizado) pode ser calculado por

$$\sigma = \frac{F^T S F}{\det(F)}. \quad (2.11)$$

2.1.3 Linearização para as configurações de referência e deformada

Como qualquer outro modelo material, o modelo de Mooney-Rivlin no estado de referência possui um material linear elástico equivalente, de maneira que a teoria de pequenos deslocamentos possa ser representada nesse modelo. As equações que fornecem essa correlação são

$$G = 2(C_1 + C_2) \quad (2.12)$$

e

$$\kappa = 2K, \quad (2.13)$$

onde G é o módulo de cisalhamento e κ o módulo de compressibilidade. Apenas estas duas constantes definem o material linear elástico equivalente e as outras constantes elásticas podem ser encontradas a partir destes dois parâmetros.

O material linear equivalente também pode ser visto como uma importante ferramenta numérica, dado que é a base para calcular a matriz de rigidez instantânea de um sistema. Portanto, é necessário calcular essa linearização para um estado de deformação qualquer.

Dado um estado de deformação, num modelo não linear, a relação tensão/deformação instantânea pode ser aproximada por uma linearização em torno desse estado. Essa linearização pode ser calculada tomando a segunda derivada da função de energia em relação a C (BALMES, 2017),

$$D_T = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial C^2}. \quad (2.14)$$

Expandindo essa equação com a regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial^2 W}{\partial C^2} = \sum_k \frac{\partial W}{\partial I_k} \frac{\partial^2 I_k}{\partial C^2} + \sum_k \sum_l \frac{\partial^2 W}{\partial I_k \partial I_l} \frac{\partial I_k}{\partial C} \frac{\partial I_l}{\partial C}, \quad (2.15)$$

onde

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial C^2} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 I_2}{\partial C^2} = \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]_{kl} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{kl} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{kl} \end{array} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{kl} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right]_{kl} \right)_{ij}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 I_3}{\partial C^2} = \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{33} & -C_{32} \\ 0 & -C_{23} & C_{22} \end{array} \right]_{kl} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & -C_{33} & C_{32} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{13} & -C_{12} \end{array} \right]_{kl} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & C_{23} & -C_{22} \\ 0 & -C_{13} & C_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{kl} \end{array} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -C_{33} & 0 & C_{31} \\ C_{23} & 0 & -C_{21} \end{array} \right]_{kl} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ C_{33} & 0 & -C_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{kl} \right)_{ij}. \quad (2.18)$$

Os termos ainda não calculados são os de segunda ordem em relação a I_i ,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_1} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_3} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_3 \partial I_1} = -\frac{1}{3} C_1 I_3^{-\frac{4}{3}}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial I_2 \partial I_3} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_3 \partial I_2} = -\frac{2}{3} C_2 I_3^{-\frac{5}{3}}, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial I_3^2} = \frac{4}{9} C_1 I_3^{-\frac{7}{3}} + \frac{10}{9} C_2 I_3^{-\frac{8}{3}} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial I_3^2}, \quad (2.22)$$

onde

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial I_3^2} = \frac{1}{2} K I_3^{-\frac{3}{2}}, \quad (2.23)$$

sendo que neste caso,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial I_1} = \frac{\partial \alpha}{\partial I_2} = 0. \quad (2.24)$$

2.1.4 Termos para o solver numérico

Para implementar a função no solver de elementos finitos do software SDTools, os esforços internos devem ser calculados (BALMES, 2017):

$$F_{int_{ij}} = F_{ki} S_{jk}, \quad (2.25)$$

onde S é definido pela equação 2.7. Este termo é necessário para calcular o trabalho virtual dos esforços internos (BALMES, 2017),

$$\int_{\Omega} S : de = \int_{\Omega} \{\delta q_i\}^T \{N_{,j}\} F_{ik} S_{kj}, \quad (2.26)$$

onde $N_{,j}$ são as derivadas das funções de forma dos elementos e q_i corresponde aos deslocamentos na direção i . Para acelerar os cálculos, o solver da SDTools utiliza ao invés das funções de forma, uma matriz de observação B , dado que tais funções variam apenas com o tipo de elemento. Assim, temos

$$a_{ij} = u_{i,j} = \{N_{,j}\}^T \{\delta q_i\} = [B]_{ij \times kl} \{q_{kl}\}, \quad (2.27)$$

onde k é o índice do componente espacial da coordenada q (x,y,z), l é o índice do nó, i é a coordenada espacial do gradiente de deslocamento e j é a derivada em relação ao espaço, x , y or z . Dado que esses valores são calculados em cada ponto de Gauss, a integral no elemento se torna uma soma ponderada pelos pesos de Gauss no mesmo elemento:

$$\int_{\Omega} S : de = \int_{\Omega} \{\delta q_k\}^T \{N_{,j}\} F_{ki} S_{ij} = \{\delta q_{kl}\}^T \left\{ \sum_g [B]_{kl \times ij}^T [S]_{ij} w_g \det(J_g) \right\}. \quad (2.28)$$

Sendo w_g os pesos de Gauss e J_g o Jacobiano do elemento. Num solver de elementos finitos, a diferença entre o trabalho externo e o trabalho interno é o resíduo de um método iterativo (no caso, utiliza-se o método de Newton) (BALMES, 2017). Para poder calcular esse resíduo, é necessário calcular a matriz Jacobiana do sistema em relação aos deslocamentos. Essa matriz também é chamada de matriz de rigidez geométrica e calcula-se por

$$K_G = \int_{\Omega} \{\delta q_m\}^T \{N_{,l}\} (D_G)_{njml} \{N_{,j}\} \{\delta q_n\}, \quad (2.29)$$

onde D_G é a rigidez material tangencial para um dado estado de deformação,

$$(D_G)_{njml} = F_{ni} (D_T)_{ijkl} F_{mk} + S_{lj}. \quad (2.30)$$

Novamente, pode-se utilizar a matriz de observação B , juntamente com os pesos de Gauss, para chegar a implementação numérica realizada no programa SDTools

$$K_G = \{\delta q_{mo}\}^T \sum_g \left([B]_{mo \times nl}^T (D_G)_{njml} [B]_{jm \times no} \right) w_g \det(J_g) \{q_{no}\}. \quad (2.31)$$

2.1.5 Exemplos de verificação

Tendo calculado a lei constitutiva material, bem como realizado a implementação numérica, é necessário realizar casos teste para assegurar que a implementação foi bem realizada, além de garantir que os valores escolhidos para os parâmetros materiais sejam

condizentes com a realidade. Os casos descritos aqui têm, cada um, sua solução analítica e foram implementados em um único elemento para a verificação, com bons resultados.

O primeiro caso considerado é o de **deformação triaxial**. Dado um paralelepípedo de dimensões $(l_1 \times l_2 \times l_3)$, impõem-se os deslocamentos

$$u_1 = \lambda_1 x_1, \quad u_2 = \lambda_2 x_2, \quad u_3 = \lambda_3 x_3, \quad (2.32)$$

assim, temos o gradiente de deformação F e o tensor direito de Cauchy-Green C

$$F = \text{diag}(1 + \lambda_i), \quad C = \text{diag}[(1 + \lambda_i)^2]. \quad (2.33)$$

O que resulta nos invariantes

$$I_1 = \sum_i (1 + \lambda_i)^2 \quad I_2 = \sum_{i < j} (1 + \lambda_i)^2 (1 + \lambda_j)^2 \quad I_3 = \prod_i (1 + \lambda_i)^2 \quad (2.34)$$

Usando as equações 2.9 e 2.8 para calcular as derivadas em relação a I_i e a C , bem como a equação 2.7, para calcular o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, temos

$$S_{ii} = 2 \left[C_1 I_3^{-\frac{1}{3}} + C_2 I_3^{-\frac{2}{3}} (I_1 - (1 + \lambda_i)^2) + \left(-\frac{1}{3} C_1 I_1 I_3^{-\frac{4}{3}} - \frac{2}{3} C_2 I_2 I_3^{-\frac{5}{3}} + K(1 - I_3^{-\frac{2}{3}}) \right) I_3 (1 + \lambda_i)^{-2} \right] \quad (2.35)$$

No caso de um esforço não seguidor, os esforços que devem ser impostos no paralelepípedo devem ser dados pelo primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff P , que relaciona as áreas na configuração de referência aos esforços na configuração deformada (BOWER, 2009)

$$P = FS, \quad (2.36)$$

que resulta em

$$P_{ii} = (1 + \lambda_i) S_{ii}. \quad (2.37)$$

Caso um esforço seguidor sob o sistema seja aplicado, então o tensor de tensões apropriado é o de Cauchy, que relaciona as áreas e esforços relativos à configuração deformada. Usando a equação 2.11,

$$\sigma_{ii} = \frac{(1 + \lambda_i)}{\prod_j (1 + \lambda_j)} S_{ii} \quad (2.38)$$

Dessa maneira, temos, finalmente, as condições de contorno para equilibrar os esforços internos numa condição não seguidora

Para $x = 0$, $u_x = 0$

Para $y = 0$, $u_y = 0$

Para $z = 0$, $u_z = 0$

Para $x = l_x$, $p_x = -(1 + \lambda_1) S_{11}$

Para $y = l_y$, $p_y = -(1 + \lambda_2) S_{22}$

Para $z = l_z$, $p_z = -(1 + \lambda_3) S_{33}$,

enquanto para uma configuração seguidora, Para $x = 0$, $u_x = 0$

Para $y = 0$, $u_y = 0$

Para $z = 0$, $u_z = 0$

Para $x = l_x$, $p_x = -\frac{1+\lambda_1}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}S_{11}$

Para $y = l_y$, $p_y = -\frac{1+\lambda_2}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_3)}S_{22}$

Para $z = l_z$, $p_z = -\frac{1+\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)}S_{33}$.

Utilizando essas condições, foi verificado que os deslocamentos estão de acordo com os dados pelos coeficientes λ_1 , λ_2 , λ_3 na implementação numérica.

Para o caso de **cisalhamento simples**, tomamos o mesmo paralelepípedo de dimensões $(l_1 \times l_2 \times l_3)$ e deslocamentos

$$u_1 = x_1, \quad u_2 = x_2 + \gamma x_1, \quad u_3 = x_3, \quad (2.39)$$

assim temos o gradiente de deformações F e o tensor de deformações direito de Cauchy-Green C ,

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 + \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Dessa maneira, os invariantes são também calculados,

$$I_1 = 3 + \gamma^2 \quad I_2 = 3 + \gamma^2 \quad I_3 = 1. \quad (2.41)$$

Usando as equações 2.9 e 2.8 para calcular as derivadas em relação a I_i e a C , bem como a equação 2.7, podemos obter o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff S ,

$$S = 2 \left[C_1 I + C_2 \begin{pmatrix} 2 & -\gamma & 0 \\ -\gamma & 2 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 + \gamma^2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}C_1 I_1 - \frac{2}{3}C_2 I_2 \right) \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ -\gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]. \quad (2.42)$$

Usando a equação 2.11 e simplificando, temos o tensor de tensões de Cauchy σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2(C_1 - C_2) - 2C_2\gamma^2 - \alpha & 2(C_1 + C_2)\gamma & 0 \\ 2(C_1 + C_2)\gamma & 2(C_1 - C_2) + 2C_1\gamma^2 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & (C_1 - C_2) - \alpha \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

onde

$$\alpha = \frac{2}{3}(C_1 I_1 - C_2 I_2). \quad (2.44)$$

Assim, os esforços externos para tais deslocamentos numa configuração não seguidora valem

Para $x = 0$, $\{u\} = \{0 \ 0 \ 0\}^T$

Para $y = 0$, $\{p\} = \{S_{21} \ S_{22} \ 0\}^T$

Para $z = 0$, $\{p\} = \{0 \ 0 \ S_{33}\}^T$

Para $x = l_x$, $\{p\} = \{-S_{11} \ -S_{12} \ 0\}^T$

Para $y = l_y$, $\{p\} = \{-S_{21} \ -S_{22} \ 0\}^T$

Para $z = l_z$, $\{p\} = \{0 \ 0 \ -S_{33}\}^T$.

Enquanto para um esforço seguidor, temos Para $x = 0$, $\{u\} = \{0 \ 0 \ 0\}^T$

Para $y = 0$, $\{p\} = \{\sigma_{21} \ \sigma_{22} \ 0\}^T$

Para $z = 0$, $\{p\} = \{0 \ 0 \ \sigma_{33}\}^T$

Para $x = l_x$, $\{p\} = \{-\sigma_{11} \ -\sigma_{12} \ 0\}^T$
 Para $y = l_y$, $\{p\} = \{-\sigma_{21} \ -\sigma_{22} \ 0\}^T$
 Para $z = l_z$, $\{p\} = \{0 \ 0 \ -\sigma_{33}\}^T$.

Com a mesma formulação, um interessante caso particular da deformação triaxial é o caso de **cisalhamento puro**, onde temos

$$\lambda_j = \lambda_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_i}} - 1. \quad (2.45)$$

Os invariantes e os tensores de deformação seguem sendo calculados pelas equações 2.34 e 2.32. Dessa maneira, o terceiro invariante I_3 , relacionado à variação de volume, tem o valor 1, de maneira que a equação 2.36 possa ser simplificada para

$$S_{ii} = 2 \left[C_1 + C_2 \left(I_1 - (1 + \lambda_i)^2 \right) + \left(-\frac{1}{3}C_1 I_1 - \frac{2}{3}C_2 I_2 \right) (1 + \lambda_i)^{-2} \right]. \quad (2.46)$$

Assim, a expressão do primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff segue sendo a mesma (equação 2.37), enquanto o tensor de tensões de Cauchy se simplifica para

$$\sigma_{ii} = (1 + \lambda_i)^2 S_{ii} \quad (2.47)$$

Nesse caso particular, também não há mudança na configuração dos esforços em relação ao caso de deformação triaxial, tanto para o caso seguidor, quanto para o caso não seguidor.

Outro caso particular da deformação triaxial é o caso de **deformação uniaxial**, onde $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Apesar das equações 2.34 e 2.32 não se simplificarem, este caso é interessante ao avaliar a variação de volume

$$\Delta V = \det(F) - 1 = \lambda_1. \quad (2.48)$$

Se o material apresenta um alto módulo de compressibilidade $2K$ (cerca de cem vezes maior que os parâmetros C_1 e C_2 , normalmente), que é uma condição realista para elastômeros, o tensor de tensões de Cauchy (para pequenos deslocamentos) pode ser aproximado por

$$\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma_3 \approx 2\lambda_i K. \quad (2.49)$$

2.1.6 Exemplo com mais de um elemento

Nesta subseção, o objetivo é confirmar a capacidade de visualizar as variáveis que descrevem o modelo de Mooney-Rivlin, como a energia livre, os invariantes ou mesmo a rigidez tangente.

O modelo utilizado é o de um cubo com dimensões $1 \times 1 \times 1$, com cinco elementos em cada direção, constituído pelo material de Mooney-Rivlin com constantes dadas pela tabela 1. As condições de contorno foram impostas de maneira que as respostas analíticas da seção 2.1.5 ainda pudessem ser válidas. Essas condições são: para $x = 0$, $u_x = 0$, para $y = 0$, $u_y = 0$ e para $z = 0$, $u_z = 0$. Nas faces restantes ($x = 1$; $y = 1$ e $z = 1$), as tensões calculadas analiticamente pela expressão 2.36 foram impostas. Para os seguintes cálculos, os esforços externos foram impostos para que o deslocamento nas faces $x = 1$ e $y = 1$ fossem nulos, e variando para a face $z = 1$. Esse deslocamento variável é colocado como a abscissa nos gráficos a seguir.

Tabela 1 – Parâmetros de Mooney-Rivlin para o primeiro exemplo

C_1	$4 \times 10^5 \text{Pa}$
C_2	$1 \times 10^5 \text{Pa}$
K	10^6 e 10^7Pa

Quando utilizando o menor valor de K , os cálculos divergiam para uma compressão em torno de 30%. Para a tração do material, a estabilidade numérica é um pouco maior, visto que apenas em torno de 40% de deformação ocorre divergência. Para o segundo valor de K , com o material tendendo a incompressibilidade, o método divergia em torno de 20% de deformação, tanto para compressão, quanto para tração.

Observando a evolução da energia com o deslocamento (figura 3), vê-se que a energia evolui de maneira assimétrica para tração e compressão. Isso ocorre pelo fato de que o termo α na expressão de energia rigidifica mais o material em compressão do que em tração.

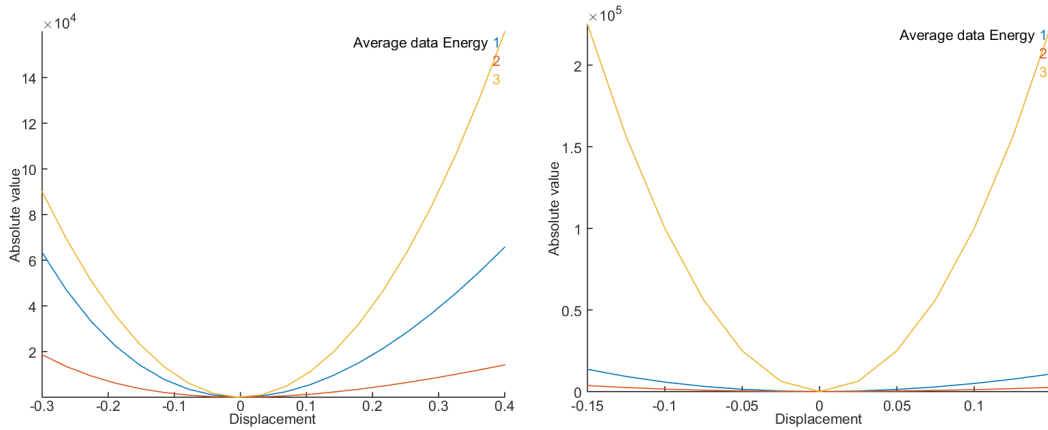


Figura 3 – Valores de energia para $K = 10^6 \text{Pa}$ e $K = 10^7 \text{Pa}$ respectivamente

Também é evidente que o terceiro termo de energia - relacionado a variação de volume - domina os outros dois. Na análise do material perto da incompressibilidade, os outros dois termos podem até ser desprezados.

Na figura 4, pode-se ver que os invariantes evoluem de maneira linear em relação ao deslocamento vertical. Isso acontece devido ao fato de que dois dos deslocamentos são nulos, fazendo com que a deformação volumétrica - relacionada aos invariantes - evolua de forma linear com o deslocamento vertical.

A derivada da energia em relação aos invariantes é um dos componentes que compõem a energia total. Sendo assim, é importante analisar sua evolução, mostrada na figura 5. As duas primeiras componentes mostram uma grande variação negativa para compressão e em tração, tendem para um valor constante. A terceira componente, por sua vez, exibe o comportamento contrário, mostrando um crescimento elevado com compressão, e um crescimento suave em tração. Levando em conta o caso mais rígido, as duas primeiras componentes se comportam como para o caso menos rígido, porém a terceira componente apresenta um comportamento linear e muito mais intenso.

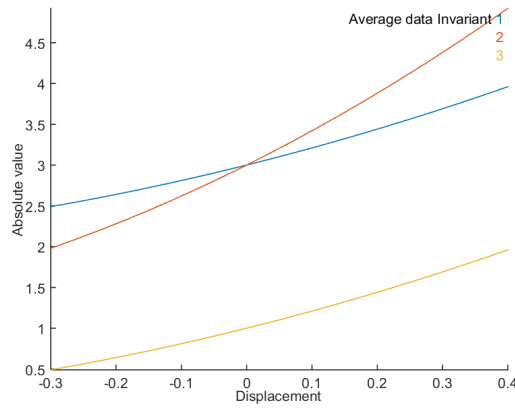


Figura 4 – Evolução dos invariantes

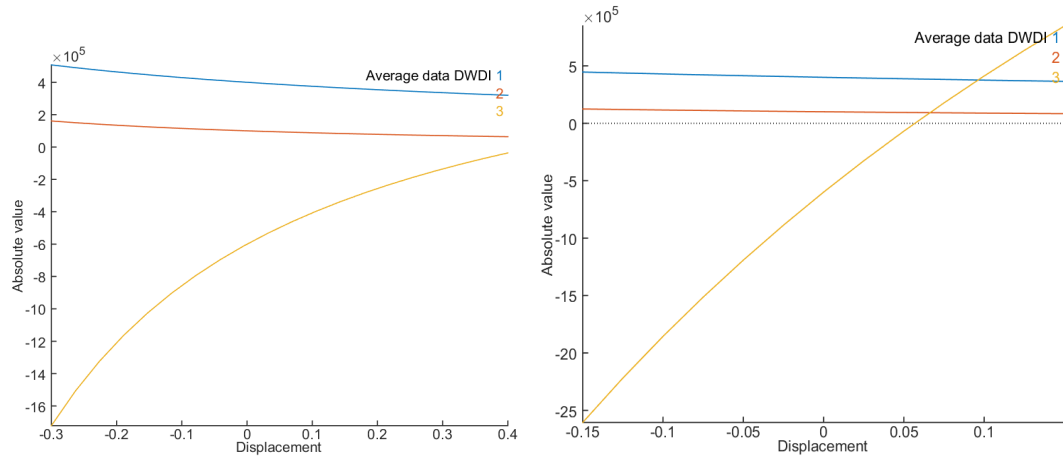


Figura 5 – Derivadas dos invariantes para $K = 10^6 Pa$ e $K = 10^7 Pa$

A rigidez material tangente também foi calculada, e na figura 6, onde foram traçadas as evoluções dos componentes principais dessa matriz, pode-se ver que o material se rigidifica rapidamente sob compressão, enquanto em tração, ele perde rigidez até um limite, onde o material se instabiliza. Nas componentes transversais, nota-se o comportamento oposto, porém com variações lineares. A variação de rigidez se situa entre -30% e 200% .

No caso mais incompressível, a queda da rigidez na direção do deslocamento é muito mais sutil, enquanto as componentes transversais se comportam praticamente da mesma maneira, porém com variação mais intensa - entre -25% e 25% .

Essa variação considerável nos parâmetros justifica a implementação de estratégias para lidar com as não linearidades na modelagem de materiais com este tipo de comportamento.

2.2 Caso de aplicação : massa rígida e modelo em volume de um calço

Nessa seção, a primeira aplicação do modelo hiperelástico é realizada com o objetivo de trazer respostas que possam ser levadas ao nível sistema, de maneira a relacioná-lo com a representação em metamodelo.

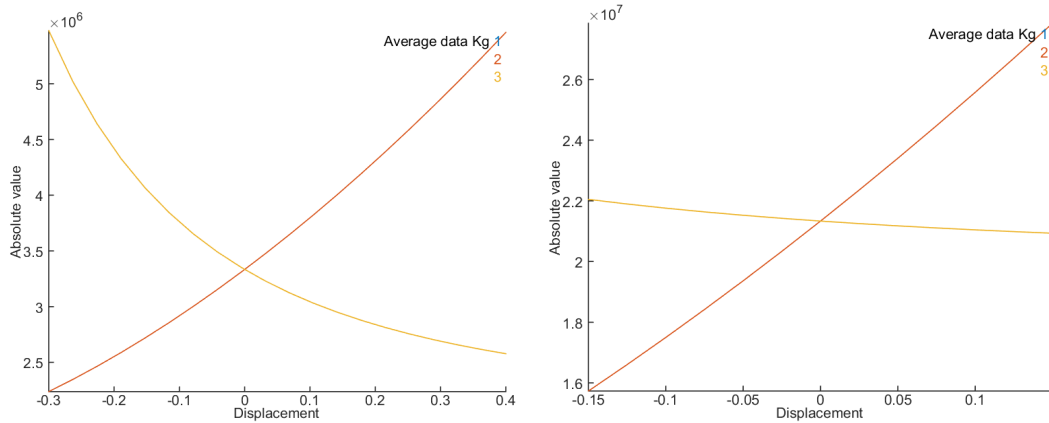


Figura 6 – Componentes da rigidez tangente para $K = 10^6 Pa$ e $K = 10^7 Pa$

Primeiramente, uma descrição completa do modelo é feita, então, os problemas de estabilidade são analisados e discutidos, com base na análise do material tangente. Então, é realizado um estudo sobre a possibilidade de aplicar métodos de redução de ordem. No final da seção, as respostas de nível sistema são obtidas e realiza-se a comparação com um material linear em grandes deformações.

2.2.1 Detalhes do modelo

Este modelo foi criado para simular um único calço elastomérico, para que fosse possível visualizar os campos de variáveis dentro do calço. O modelo tem as mesmas dimensões de um calço retirado do catálogo da empresa Paulstra SA (PAULSTRA, 2017).

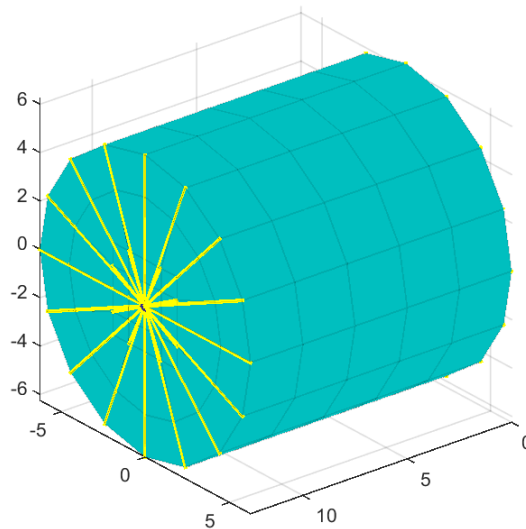


Figura 7 – Modelo RubMount

Este modelo tem uma base completamente engastada, com a outra face ligada entre si como um plano rígido (em amarelo na figura 7). Essas condições de contorno representam um calço ligado a placas de metal em suas extremidades.

O calço escolhido mede 12,5mm de comprimento e 12,5mm de diâmetro. Sua densidade foi tomada como $1,6 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, e uma massa puntiforme de 10g (em preto na figura 7) foi adicionada para diminuir a frequência natural do sistema.

O principal critério para escolher os parâmetros materiais foi a amplitude da zona de estabilidade, e por causa disso, o material modelado é consideravelmente compressível. Os valores dos parâmetros são mostrados na tabela 2.

Tabela 2 – Parâmetros de Mooney-Rivlin para o modelo volumétrico

C_1	$5 \times 10^5 \text{Pa}$
C_2	$2 \times 10^5 \text{Pa}$
K	$8 \times 10^5 \text{Pa}$

Com esses parâmetros, a primeira frequência de tração/compressão está perto de 270Hz.

2.2.2 Estabilidade

Nas primeiras simulações com esse modelo, após alguns ciclos de tração e compressão, o modelo começava a vibrar e divergia, como pode-se ver na figura 8. De acordo com (ADINA, 2007), o modelo de Mooney-Rivlin mostra instabilidades para cerca 60% de deformação para condição de tensão biaxial.

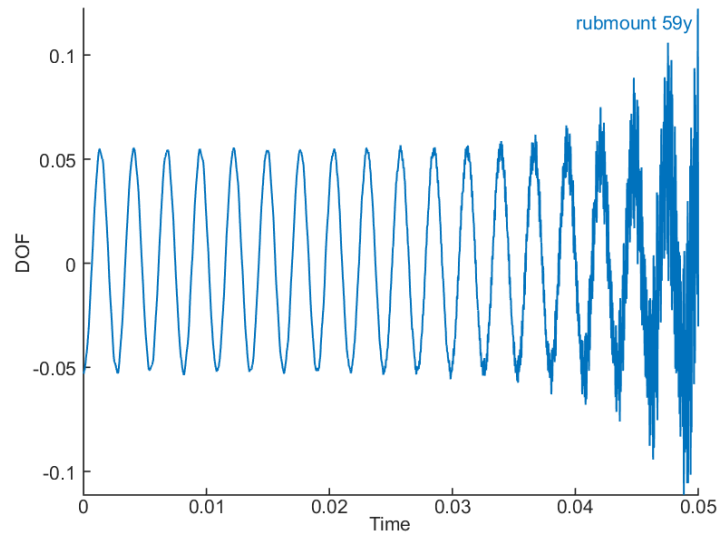


Figura 8 – Instabilidade no modelo RubMount

Esse comportamento estranho nos diz que o modelo produz energia, e como ainda estamos em um modelo puramente hiperelástico, ela não pode ser dissipada. Para investigar esse problema, uma análise de estabilidade foi realizada.

A maneira mais simples de verificar se um material é estável ou não é a avaliação do critério de estabilidade de Drucker (ABAQUS, 2017)

$$d\sigma^T d\varepsilon > 0 \Rightarrow d\varepsilon^T D_T d\varepsilon > 0, \quad (2.50)$$

isso significa que a matriz de rigidez tangencial deve ser sempre definida positiva, ou que a expressão de energia deve ser convexa. Uma maneira de verificar essa condição é calcular os autovalores da matriz D_T , e todos devem ser positivos para que o modelo seja estável.

Para visualizar a zona de instabilidade relativa aos parâmetros desse modelo, foram gerados tensores de gradiente de deformações aleatórios, e com eles, calculados os invariantes e os autovalores das matrizes de rigidez tangente relativas. Assim, cada ponto foi traçado em função dos invariantes e colorido em função de sua estabilidade na figura 9. É notável que como o tensor de deformações direito de Cauchy-Green é uma forma quadrática, o espaço dos invariantes não pode ser preenchido igualmente.

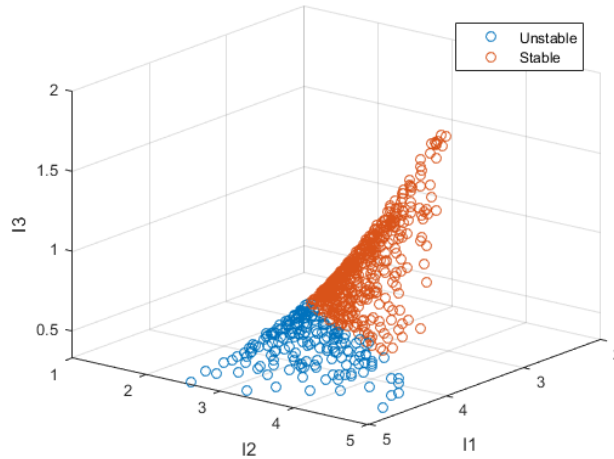


Figura 9 – Estabilidade em função dos invariantes para gradientes de deformação aleatórios

Para visualizar esta região de uma maneira mais intuitiva, uma interpolação foi realizada tomando o menor valor dos autovalores da matriz D_t em função dos invariantes. A figura 10 mostra onde essa função de interpolação vale zero, ou seja, onde o modelo passa de uma configuração de deformação estável para uma instável.

Além do fator material, a instabilidade também pode vir do termo de pré tensão. para avaliar esses efeitos em conjunto, foi realizada a análise de estabilidade em um sistema onde as matrizes de rigidez estão montadas.

Para realizar esta análise, o modelo [RubMount](#) foi usado, e nele investigamos onde haviam as instabilidades. Com esse objetivo as matrizes de rigidez tangente foram extraídas de cada ponto de Gauss, onde foram calculados os autovalores. Esse procedimento também funciona para outras variáveis, tais como os invariantes, a energia e os esforços internos.

A figura 11 mostra os autovalores e os esforços internos para um ponto de Gauss específico, com o modelo trabalhando sobre um ciclo de tração/compressão. Em um dado momento, os autovalores da matriz D_T (rigidez tangente material) e $D_G - S$ (matriz de rigidez material transformada) se tornam, de fato, negativos para grandes trações, desrespeitando o critério de estabilidade de Drucker, e provavelmente gerando energia nesse ponto. Outra informação importante que pode ser extraída do gráfico é a existência de uma troca de sinal no valor dos esforços internos na direção transversal à compressão, originando uma espécie de efeito de Poisson negativo (contração transversal sob compressão uniaxial), o que se confirma na ilustração do calço deformado, na figura 12.

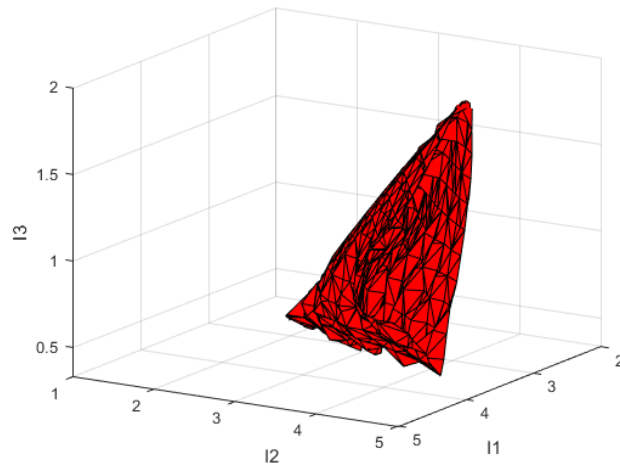


Figura 10 – Região de estabilidade calculada por interpolação

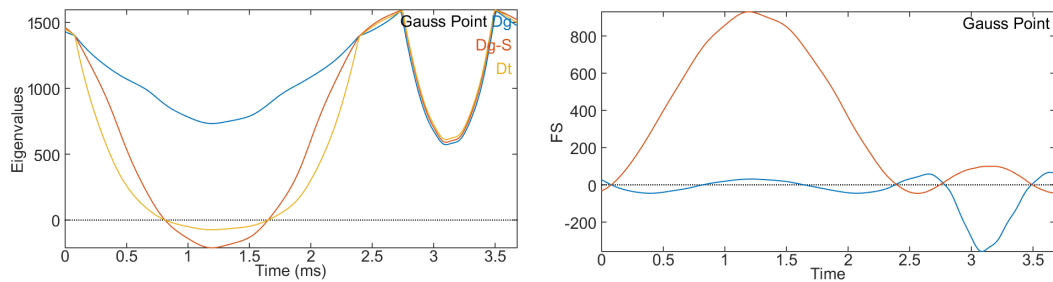


Figura 11 – Menores autovalores e esforços internos para um ponto de Gauss específico

Para entender o motivo dessa instabilidade os valores dos menores autovalores foram expandidos para os nós da malha de elementos finitos, para que pudessem ser visualizados no volume do modelo. O resultado desse procedimento é mostrado na figura 13. Na figura, vê-se que na região externa do modelo, próximo ao engaste, os autovalores são, de fato, negativos, e também é possível notar que há um forte gradiente em seu valor. Isso indica que provavelmente, nessa região o refinamento da malha não é suficiente para representar o problema, gerando esta patologia.

2.2.3 Análise de redução

Sendo possível calcular todas as variáveis necessárias para o cálculo não linear em todos os pontos de Gauss (logo, em todos os nós), é interessante estimar quantos vetores são necessários para estimar tais variáveis num ciclo inteiro de tração/compressão. Tal procedimento nos daria base para avaliar a possibilidade de hiper redução a posteriori.

Dessa maneira, uma decomposição em valores singulares foi realizada para cada uma das variáveis que pode descrever o problema (no caso, cada componente dos esforços internos, os invariantes e também cada componente do gradiente de deslocamento) para um ciclo de tração/compressão. Caso muitos valores singulares sejam significantes, uma tentativa de hiper redução seria inviável no sentido de tempo de processamento.

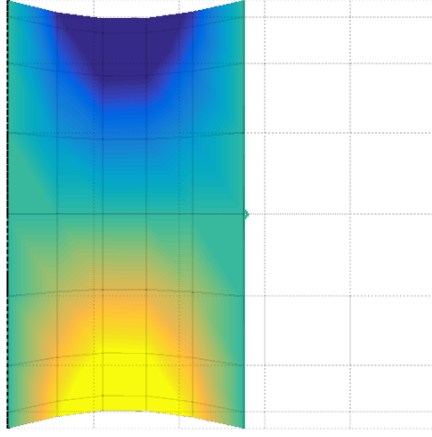


Figura 12 – Efeito de Poisson negativo no modelo [RubMount](#)

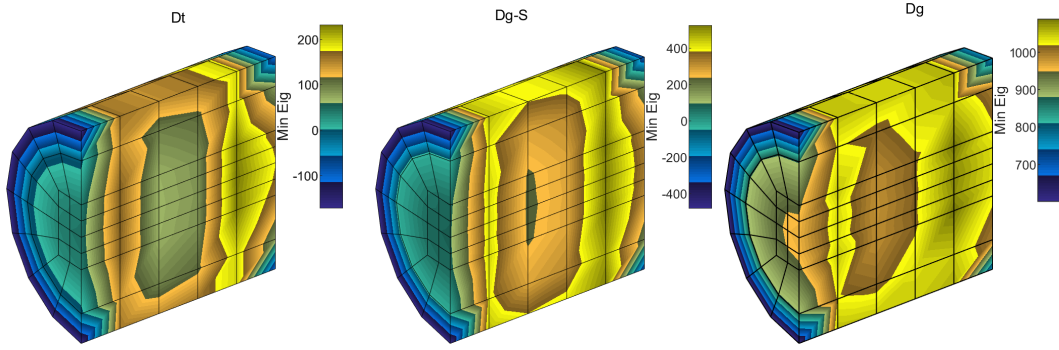


Figura 13 – Campos de autovalores das matrizes de rigidez do modelo [RubMount](#)

A redução pode ser realizada ao substituir as grandes matrizes instantâneas de elasticidade por formas singulares pré calculadas, onde apenas a amplitude dessas formas deveria ser estimada e evoluiria no tempo. Por exemplo, seria possível utilizar

$$F_i = \sum_j U_{F_i} \alpha_{F_j} \quad (2.51)$$

$$u_i = \sum_j \alpha_{u_j} U_{u_i} \quad (2.52)$$

$$F_{int_i} = \sum_j \alpha_{F_{int_j}} U_{F_{int_i}}, \quad (2.53)$$

onde os termos do lado esquerdo são aproximados pela redução, α as amplitudes singulares a serem calculadas, u as formas singulares pré calculadas, o índice i indica quantidade de componentes no modelo original, e o índice j indica o número de formas singulares utilizadas, que deve ser baseado no número de valores singulares que não são desprezíveis.

Dado que as variáveis foram calculadas em cada ponto de Gauss do modelo, é possível calcular as formas singulares para cada uma das variáveis, mas neste trabalho, o procedimento é mostrado apenas para o invariante I_1 .

Depois de calcular a decomposição em valores singulares, tais valores foram verificados. Na figura 14, vemos que a amplitude deles cai rapidamente, e, para essa componente,

se desejarmos utilizar uma precisão de 10^{-4} em relação ao maior valor singular, seria necessária a utilização de nove formas singulares como base.

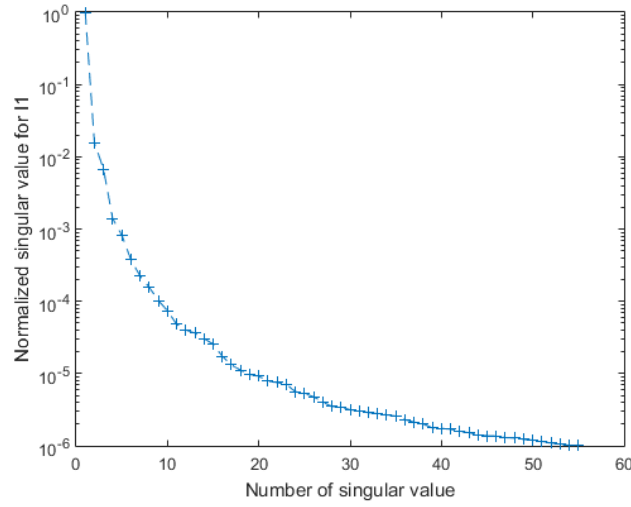


Figura 14 – Amplitude dos valores singulares para o primeiro invariante do modelo [RubMount](#)

Após o cálculo desses valores, a visualização no volume das respectivas formas foi gerada (a partir do mesmo procedimento feito com os autovalores) para verificar a coerência. A figura 15 mostra essas formas, que lembram campos senoidais, indicando certa coerência em relação ao que se esperava.

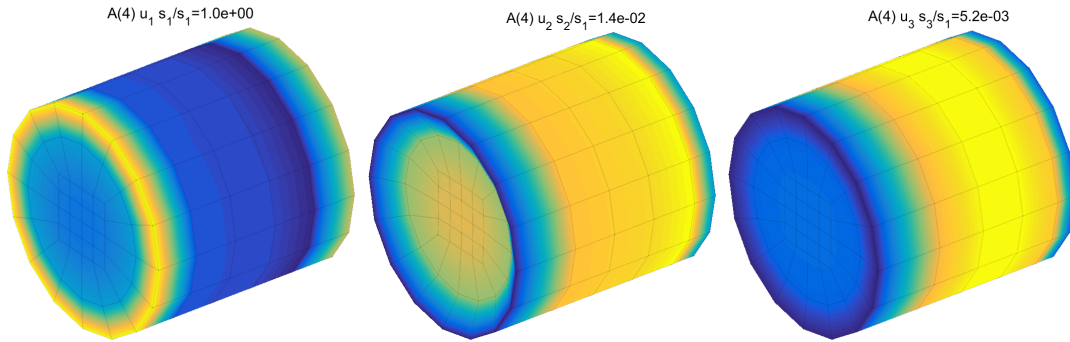


Figura 15 – Formas singulares do primeiro invariante para o modelo [RubMount](#)

Para analisar o efeito da amplitude do ciclo de tração/compressão nas formas singulares, a análise foi realizada com diferentes amplitudes, e as formas foram calculadas para cada amplitude. Ao final, também foram calculadas as formas singulares utilizando todas as deformações como base. A correlação entre todas as formas foi realizada e pode ser vista na figura 16. Para as três primeiras amplitudes, todas as bases apresentam um índice de correlação bastante elevado, enquanto para as outras amplitudes, apenas a base com todas as formas possui bons índices de correlação.

O número de dimensões de cada componente de I , FS e F foi calculado, e pode ser lido na tabela 3, com sua precisão relativa a primeira forma singular. Deve-se frisar

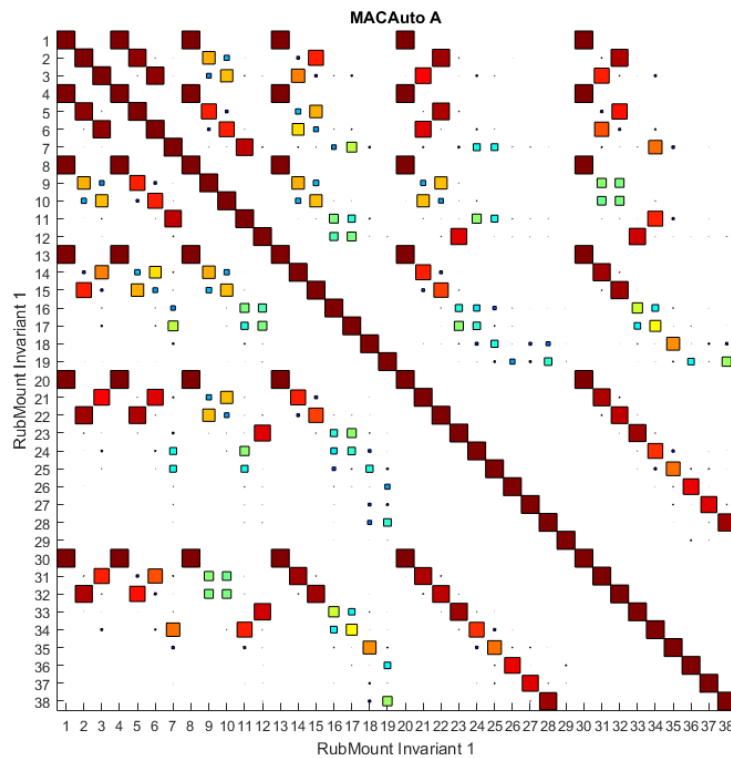


Figura 16 – Correlação entre as formas singulares do primeiro invariante para diferentes amplitudes

que nos componentes com número muito elevado de valores singulares significativos, seu valor absoluto é desprezível, e eles existem devido aos erros numéricos.

Tabela 3 – Dimensão do subespaço de cada componente do modelo

Variável	Precisão								
I	9	10	9						10^{-4}
FS	6	12	12	18	10	20	18	20	10^{-3}
F	6	33	33	13	6	51	13	51	10^{-4}

2.2.4 Influência do comportamento material

Para calcular a resposta em nível sistema do calço, é necessário calcular os esforços aplicados em suas extremidades. Esses esforços podem ser calculados tomando o valor da função resíduo utilizada no método de elementos finitos para cada ponto da face onde se deseja calcular os esforços. Após o cálculo desses resíduos e sua integração, e utilizando o deslocamento entre os centros das duas faces, podemos estabelecer uma função que relaciona força e deslocamento para o calço modelado, que pode ser implementada em um meta modelo. A figura 17 mostra as respostas de força e a função força/deslocamento obtidas para um ciclo de tração/compressão senoidal.

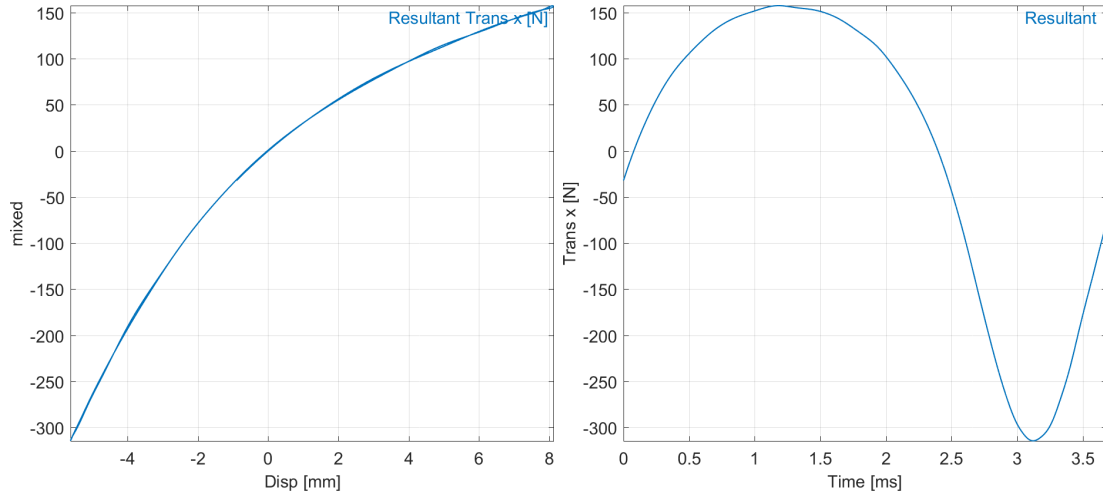


Figura 17 – Rigidez e força calculados para um deslocamento senoidal

Para estimar a influência da hiperelasticidade em relação ao efeito de não linearidade geométrica, foi feita a mesma simulação envolvendo um material linear elástico. Neste caso, a função de energia elástica é descrita por

$$W = \mu(E^2) + \frac{\lambda}{2}tr^2(E), \quad (2.54)$$

com λ e μ os primeiro e segundo coeficientes de Lamé (o segundo coeficiente também é frequentemente descrito como G e também chamado de módulo de cisalhamento), e E , o tensor de deformações de Green-Lagrange,

$$E = \frac{1}{2}(C - I). \quad (2.55)$$

Esta extensão para um material linear em grandes deformações não é, via de regra, uma boa representação da realidade, dado que sob altos índices de compressão, o modelo apresenta problemas de instabilidade (NIROOMANDI et al., 2009), apesar de oferecer uma descrição precisa para pequenas deformações. Esse modelo é frequentemente chamado de modelo de Saint-Venant-Kirchhoff na literatura.

A resposta global desse modelo mostra perda de rigidez sob compressão e rigidificação sob tração, o que se opõe ao comportamento do modelo de Mooney-Rivlin, como pode-se ver na comparação dos resultados na figura 18.

2.3 Implementações futuras

A hiperelasticidade permite uma boa representação do comportamento elástico de materiais elastoméricos. Porém, outros aspectos que esta teoria negligencia (como dissipação de energia, contato e evolução térmica) são cruciais para uma boa representação da realidade.

Nesta seção, conceitos que ainda não foram implementados, mas devem ser integrados em trabalhos futuros são descritos e discutidos. Em primeiro lugar, tratamos sobre a viscoelasticidade, onde seus modelos mais comuns são apresentados, e então os aspectos de influência do ambiente são descritos

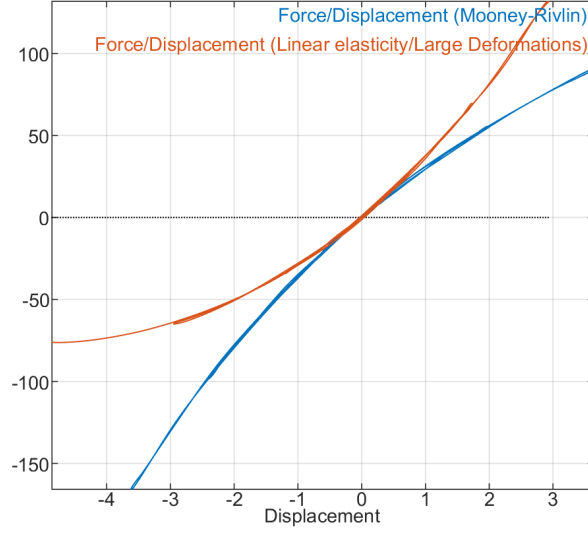


Figura 18 – Comparação da relação força/deslocamento para os modelos de Saint-Venant-Kirchhoff e Mooney-Rivlin para o modelo [RubMount](#)

2.3.1 Elementos viscosos

Materiais viscoelásticos são aqueles cuja relação entre tensão e deformação depende do tempo ([BANKS; HU; KENZ, 2010](#)). Com essa dependência do histórico de deformações, surgem algumas propriedades tais quais relaxação, fluência e histerese, que dão origem à dissipação de energia.

A utilização da viscosidade como parâmetro material implica que o amortecimento gerado pelo material é muito mais expressivo que a dissipação ligada à montagem ou a outras características estruturais, que é o caso dos elastômeros.

Elementos viscosos são representados na literatura como amortecedores, e armazenam a parte que depende do tempo dos modelos viscoelásticos, enquanto a parte puramente elástica é representada por molas.

Estes elementos apresentam respostas de deformação atrasadas em relação a tensão, envolvendo sua derivada. Por exemplo, para uma deformação imposta ε ,

$$\varepsilon = \text{Re}(\varepsilon_0 e^{i\omega t}), \quad (2.56)$$

um material elástico responde com a tensão σ_e de forma

$$\sigma_e = \text{Re}(E_e \varepsilon_0 e^{i\omega t}), \quad (2.57)$$

enquanto um material viscoso responde com uma tensão σ_v da forma

$$\sigma_v = \text{Re}(E_v i \varepsilon_0 e^{i\omega t}). \quad (2.58)$$

Dessa maneira, uma associação desses tipos de elementos fornece características intermediárias, como

$$\sigma = \text{Re}(E(1 + i\eta)\varepsilon_0 e^{i\omega t}), \quad (2.59)$$

com

$$E = \sqrt{E_e^2 + E_v^2}, \quad \eta = \frac{E_v}{E_e}. \quad (2.60)$$

Nessa expressão, podemos definir alguns conceitos usados na literatura, como o módulo de armazenamento E , ligado ao comportamento elástico, não dissipativo e o fator de perda η , relacionado à dissipação de energia.

2.3.2 Modelos reológicos

Os materiais viscoelásticos são classicamente representados por molas e amortecedores, e os modelos uniaxiais são apenas combinações simples entre eles. O **modelo de Maxwell** é composto por uma mola e um amortecedor em uma associação em série. De fato, este modelo representa um fluido em baixas frequências de excitação, visto que sua rigidez tende a zero sob baixas velocidades de deformação.

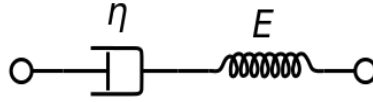


Figura 19 – Modelo reológico de Maxwell

Sua equação constitutiva é dada por

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}, \quad (2.61)$$

que no domínio da frequência se dá por

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = j\omega \frac{E\eta}{E + j\omega\eta}. \quad (2.62)$$

O **modelo de Kelvin-Voigt** é composto por uma mola e um amortecedor em uma associação em paralelo. Esse modelo não apresenta bons resultados para frequências altas, onde sua rigidez tende ao infinito.

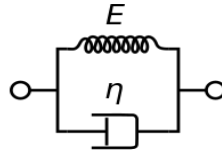


Figura 20 – Modelo reológico de Kelvin-Voigt

A formulação para esse material se dá por

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta}\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta}, \quad (2.63)$$

ou, no domínio da frequência,

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E + j\omega\eta. \quad (2.64)$$

O **amortecimento material** é um modelo de dissipação que não depende da frequência, logo não existe necessidade de criar uma variável interna para esse tipo de modelo de simples implementação.

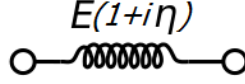


Figura 21 – Modelo reológico de amortecimento material

A equação temporal que este modelo descreve se representa por

$$\sigma = \text{Re}(E(1 + i\eta)\varepsilon), \quad (2.65)$$

enquanto na forma frequencial, ela tem uma forma muito similar,

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E(1 + j\eta). \quad (2.66)$$

O **modelo sólido viscoelástico padrão** tem a característica de possuir valores de rigidez em condição quase estática e altas velocidades definidos pelos parâmetros do modelo.

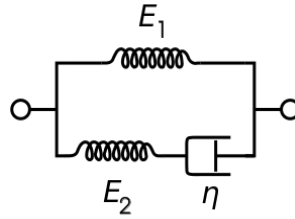


Figura 22 – Modelo reológico do sólido viscoelástico padrão

Sua equação temporal é definida por

$$(E_1 + E_2)\dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)}\varepsilon = \dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta}\sigma, \quad (2.67)$$

e sua equação em função da frequência,

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E_1 + j\omega \frac{E_2 \eta}{E_2 + j\omega \eta}. \quad (2.68)$$

Os modelos precedentes são precisos apenas em uma estreita faixa de frequências. Para um modelo que seja válido em um espectro maior, recorre-se à elaboração de modelos mais complexos, ou à utilização de mais parâmetros materiais. Quando se utilizam mais

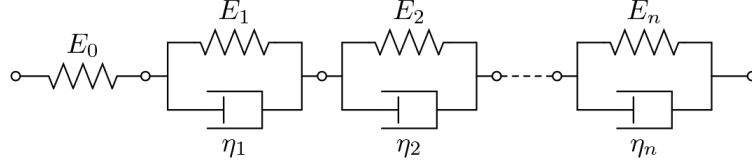


Figura 23 – Modelo reológico da cadeia de Kelvin

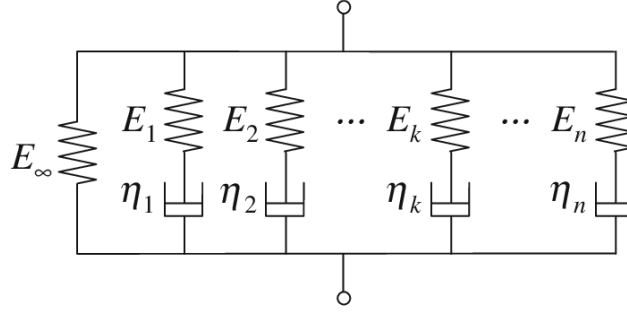


Figura 24 – Modelo reológico generalizado de Maxwell

parâmetros, os **modelos generalizados** são a solução mais comum. Dentre esses tipos de modelos, os mais utilizados são a cadeia de Kelvin (figura 23) e o modelo generalizado de Maxwell (figura 24).

Em geral, as equações temporais que descrevem esse tipo de modelo podem ser reduzidas a

$$\sigma + \sum_{m=1}^M b_m \frac{d^m \sigma}{dt^m} = a_0 \varepsilon + \sum_{n=1}^N a_n \frac{d^n \varepsilon}{dt^n}, \quad (2.69)$$

que passada para o domínio da frequência,

$$\sigma + \sum_{m=1}^M b_m (j\omega)^m \sigma = a_0 \varepsilon + \sum_{n=1}^N a_n (j\omega)^n \varepsilon. \quad (2.70)$$

Todos os modelos citados anteriormente podem ser escritos nessa última forma descrita (JAUMOUILLE; SINOUE; PETITJEAN, 2010).

Para aumentar o domínio de validade a partir de um modelo mais elaborado, porém com menos parâmetros, a utilização de **derivadas fracionárias** é um dos métodos possíveis. Todavia, devido à sua complexidade numérica (cada passo exige o cálculo de uma convolução), a utilização desse modelo ainda é bastante limitada. Sua formulação base é

$$\sigma + \sum_{n=1}^N b_n D^{\beta_n} \sigma = a_0 \varepsilon + \sum_{n=1}^N a_n D^{\alpha_n} \varepsilon, \quad (2.71)$$

onde D é o operador de derivada fracionária, que é definido por

$$D^\alpha = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}. \quad (2.72)$$

No domínio da frequência, esta equação se transforma em

$$\sigma + \sum_{n=1}^N b_n(j\omega)^{\beta_n} \sigma = a_0 \varepsilon + \sum_{n=1}^N a_n(j\omega)^{\alpha_n} \varepsilon. \quad (2.73)$$

De acordo com (JAUMOUILLE; SINOUE; PETITJEAN, 2010), com este modelo, três a cinco parâmetros são suficientes para obter uma boa representação de calços elastoméricos.

2.3.3 Modelos volumétricos de viscoelasticidade

Os modelos reológicos apresentados fornecem boas representações para metamodelos. Contudo, é necessária uma generalização para três dimensões para integrar esse tipo de comportamento em um modelo volumétrico. Nessa seção alguns modelos desse tipos serão descritos.

Na teoria linear, a **tensão viscoelástica linear** pode ser considerada uma generalização da solução do problema elástico, porém com dependência no tempo. A derivação desse modelo parte do fato de que a deformação pode ser decomposta em um número infinito de funções degrau de Heaviside (mais detalhes da derivação em (BRINSON, 2008)). O problema geral de viscoelasticidade linear se escreve

$$\sigma = \int_0^t 2G(t - \tau) \frac{d\varepsilon^d}{d\tau} d\tau + I \int_0^t K(t - \tau) \frac{d\varepsilon^v}{d\tau} d\tau, \quad (2.74)$$

onde $K(t)$ and $G(t)$ define o material viscoelástico, sendo a função módulo de compressibilidade e a função módulo de cisalhamento, respectivamente, τ uma variável auxiliar para as convoluções, e ε^d e ε^v são as componentes desviatória e volumétrica do tensor de deformações linearizado ε .

Da origem do modelo, sabemos que as funções de compressibilidade e de cisalhamento devem ser as respostas de relaxamento do material quando submetido a um esforço unitário repentino, em volume ou em cisalhamento. Dado que as respostas típicas são exponenciais negativas, essas funções são geralmente escritas em termos de séries de Prony (PARK; SCHAPERY, 1999),

$$K(t) = K_0 + \sum_{i=1}^n K_i e^{-\frac{t}{\tau_i^K}} \quad (2.75)$$

$$G(t) = G_0 + \sum_{i=1}^n G_i e^{-\frac{t}{\tau_i^G}} \quad (2.76)$$

No modelo **visco-hiperelástico**, é possível usar a mesma generalização usada na viscoelasticidade linear, com uma função de relaxação para o componente desviatório e uma função de relaxação para a componente volumétrica. Separando as duas componentes da energia, temos,

$$S^{el} = 2 \frac{\partial W^d}{\partial C^d} + 2 \frac{\partial W^v}{\partial C^v} \quad (2.77)$$

Por extensão, o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff pode ser representado pela soma de suas componentes desviatória e volumétrica (ANSYS, 2017)

$$S^d = \int_0^t G(t - \tau) \left(2 \frac{d}{d\tau} \frac{dW^d}{dC^d} \right) d\tau \quad (2.78)$$

$$S^v = \int_0^t K(t - \tau) \left(2 \frac{d}{d\tau} \frac{dW^v}{dC^v} \right) d\tau C^{-1}. \quad (2.79)$$

Para que não seja necessário calcular a convolução a cada passo de tempo, o seguinte método se aplica

$$S_{t+\Delta t}^d = e^{\frac{\Delta t}{\tau_i^G}} S_t^d + \frac{G_i}{\sum G_i} e^{-\frac{\Delta t}{2\tau_i^G}} \left(\frac{dW^d}{dC_{t+\Delta t}} - \frac{dW^d}{dC_t} \right) \quad (2.80)$$

$$S_{t+\Delta t}^v = e^{\frac{\Delta t}{\tau_i^K}} S_t^v + \frac{K_i}{\sum K_i} e^{-\frac{\Delta t}{2\tau_i^K}} \left(\frac{dW^v}{dC_{t+\Delta t}} - \frac{dW^v}{dC_t} \right) \quad (2.81)$$

Ainda existem outros modelos que podem representar o comportamento de viscoelasticidade não linear. Como exemplos, temos o modelo de Bergstrom-Boyce (JOHANSSON; RUNESSON, 2005), e o modelo de Schapery (BRINSON, 2008), que podem fornecer resultados bastante precisos para polímeros.

2.3.4 Fatores ambientais

O comportamento dos elastômeros é fortemente dependente da **temperatura**, com variações de parâmetros que não podem ser desprezadas.

Uma característica do material que permite conhecer as ordens de grandeza dos parâmetros materiais de um polímero é sua temperatura de transição vítrea. Sabe-se que abaixo dessa temperatura, o material é rígido e cristalino, enquanto acima dessa temperatura, temos uma zona onde ele possui uma resposta viscosa. Entre as duas zonas há uma zona de transição onde as propriedades passam por variações extremamente intensas, e é normalmente onde se encontram as propriedades de amortecimento mais interessantes (ISAYEV, 2014).

Os efeitos de temperatura frequentemente são comparados aos efeitos do tempo, e na literatura especializada encontram-se simplificações que levam essa equivalência em conta. Um desses exemplos é a função de equivalência de Williams-Landel-Ferry,

$$\log(A) = \frac{C_2(T - C_1)}{C_3(T - C_1)}, \quad (2.82)$$

onde A , o fator de deslocamento do tempo é função dos parâmetros materiais, C_1 , C_2 e C_3 , e da temperatura T . Esta função fornece resultados precisos para polímeros acima da temperatura de transição vítrea (ISAYEV, 2014).

A dependência em função da **amplitude** é dada principalmente pelo efeito Payne, que é uma diminuição na rigidez do material com o aumento da amplitude de deformação sob carregamento cíclico. Em compensação, o módulo de perda aumenta até um máximo local, para voltar a diminuir (JAUMOUILLE; SINOUE; PETITJEAN, 2010).

Especula-se que suas origens sejam as fracas ligações de van der Waals entre o negro de fumo e a borracha, que são de certa forma quebradas enquanto o material está submetido a grandes deformações. No entanto, essas ligações são reestabelecidas na volta a uma condição de pequenas deformações, o que configura um efeito reversível. Outras explicações envolvem a coesão entre as macromoléculas e a superfície do agregado, com a criação de ligações entre as duas fases com pequenas deformações ([BOURGETEAU, 2009](#)).

3 Modelo Sistema

A utilidade de calços elastoméricos está em sua integração dentro de um sistema, onde sua baixa rigidez, seu alto fator de amortecimento e sua capacidade de suportar grandes deformações sem deterioração, em relação a outros componentes metálicos são propriedades chave para este material. Sendo assim, a possibilidade de integrar esses elementos em um mesmo modelo de sistema é crucial para aplicações práticas.

Para validar a flexibilidade do modelo volumétrico implementado no software SDTools, e para colocar em perspectiva um possível trabalho experimental, neste capítulo foi desenvolvido um modelo baseado em um possível experimento que excite as não linearidades do material.

Na seção 3.1 o modelo usado nas simulações é descrito. A seção 3.2 introduz conceitos de síntese modal e analisa as respostas dadas pelo modelo. A seção 3.3 estabelece ligações entre os modelos volumétricos e metamodelos, ao tratar do problema de identificação e ao analisar as diferenças entre os modelos.

3.1 Desenho de um sistema para testes

Antes de poder implementar o modelo em algum caso industrial, é importante realizar testes para validar os parâmetros de um metamodelo, ou mesmo de um modelo volumétrico. Esse sistema deve ser replicável em escala real, para que as simulações possam ser comparadas aos ensaios.

Esta seção detalha o modelo de sistema utilizado e suas dimensões para obter resultados razoáveis.

3.1.1 Modelo realizado

O propósito geral do experimento é definir uma estrutura similar a uma barra, onde os calços sejam acionados em tração/compressão com carregamentos intensos o bastante para excitar o comportamento não linear. A dinâmica geral são as mesmas de uma barra com uma rótula, considerada na seção 2.3 de (HAMMAMI, 2014), vista na figura 25.

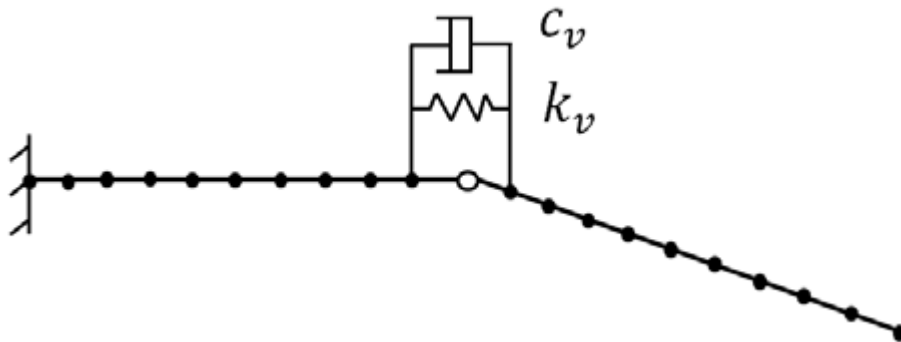


Figura 25 – Barra com rótula. FONTE: Hammami, 2014

Na configuração nominal, a barra está engastada em uma extremidade e livre na outra. Para tal condição de engaste, seria necessário colocar grandes massas na extremidade para obter condições similares.

A rótula é realizada ao acoplar duas placas por meio de dois calços elastoméricos no eixo vertical, como mostra a figura 26. Para um desenho inicial, que considera apenas a alocação de frequências, os calços são tratados como molas simples. As não linearidades são adicionadas nas seções seguintes.

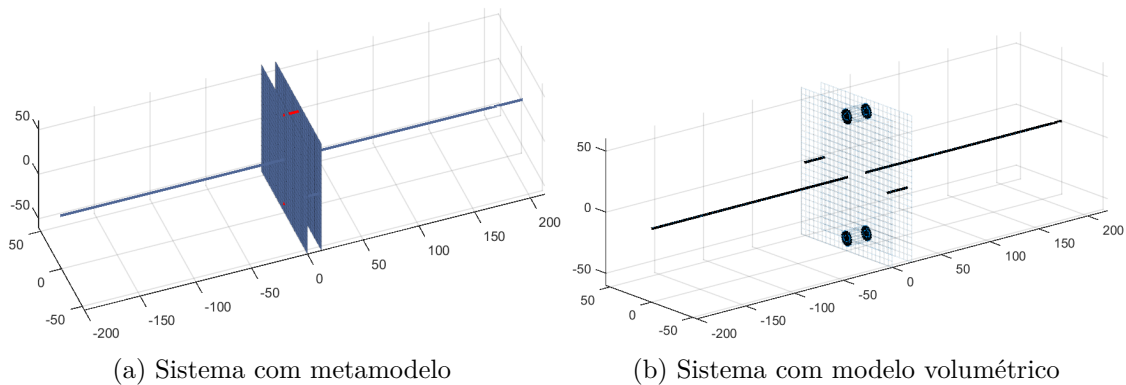


Figura 26 – Modelos desenhados para a análise não linear

Cada barra é representada no modelo com uma seção circular de 20mm e um comprimento de 200mm. As dimensões das placas são de 120mm×120mm, com 3mm de espessura. Além disso as outras barras que prendem as placas, são parafusos, na altura $y = 0$, o que permite a introdução de pré carregamentos, adicionando uma rigidez à flexão baixa em relação à rigidez dos calços. Os parafusos foram modelados como barras com seção circular de 4mm de diâmetro.

O calço modelado foi o mesmo que o descrito na seção 2.2, no entanto, aqui eles são representados como um elemento **cbush** (mola), em vermelho na figura 26a, ou como um sólido hiperelástico na figura 26b. Para a resposta linear, e para as primeiras análises não lineares, apenas o modelo de mola é considerado.

3.1.2 Resposta linear

A primeira análise realizada foi a decomposição modal do modelo linear, para assegurar que os calços sejam de fato excitados pela primeira frequência natural do sistema, e que ela não tenha um valor tão elevado. A figura 27 mostra que o primeiro modo, de fato interage fortemente com os calços, e que o segundo modo, apesar de excitar os parafusos, não os deforma significativamente.

Uma análise em frequência foi realizada para verificar os modos ativos para carregamentos cíclicos na direção dos calços. Esta análise foi feita impondo um carregamento cíclico na extremidade livre da estrutura. O esforço foi de amplitude de 1N, na direção dos calços, com frequência variando entre 1Hz e 200Hz. Nenhum modelo de dissipação foi levado em conta para os elementos **cbush**. Na resposta em frequência (figura 28), pode-se ver que a resposta mostra duas ressonâncias, que correspondem aos primeiro e terceiro modos. Como esperado, o segundo modo (flexão horizontal) é completamente invisível para essa configuração de carregamento. Para confirmar a coerência do modelo, um teste de

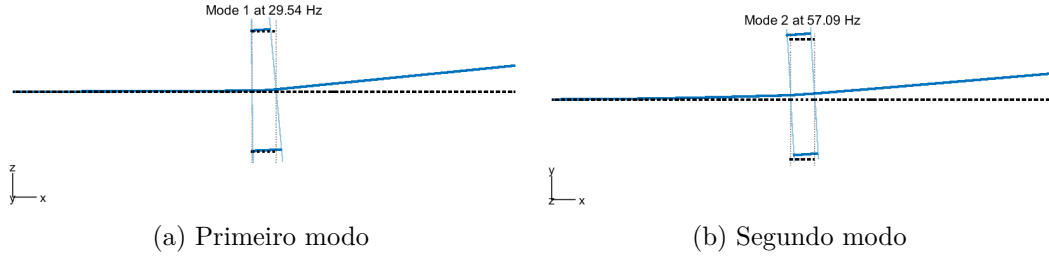


Figura 27 – Modos do modelo [BeamPBush](#)

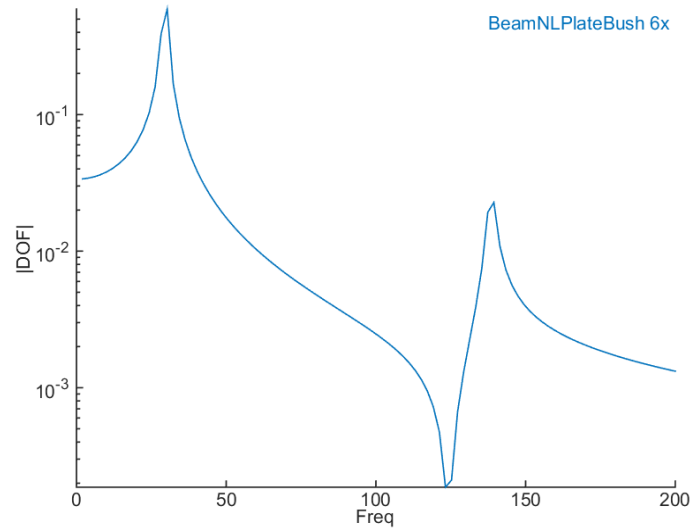


Figura 28 – Resposta em frequência do modelo linear [BeamPBush](#)

seno interrompido foi realizado. Numericamente, esse teste consiste em impor as condições iniciais iguais a um modo específico, e então analisar a resposta temporal. Na realidade, esse teste consistiria em excitar externamente o sistema em uma determinada frequência, e em um dado momento, esse esforço deve ser interrompido abruptamente (DION; CHEVALIER; PEYRET, 2013). Para um sistema linear sem amortecimento, a resposta esperada e confirmada foi a permanência do sistema nesse modo. Esse procedimento foi realizado para os primeiro e terceiro modos.

Para investigar as diferenças entre os modelos volumétrico e metamodelo integrados ao sistema, uma análise modal foi realizada na estrutura com o modelo volumétrico de Mooney-Rivlin e também com a mola equivalente descrita na seção 2.2.4. Para a comparação, a resposta nos graus de liberdade ligados aos calços foram removidas para possibilitar o cálculo do índice de correlação modal entre os dois modelos (mostrado na figura 29).

Com exceção dos modos locais (modos entre 14 e 19 no modelo volumétrico), o índice de correlação modal entre as duas respostas chega perto de 100% para todos os modos, indicando que caso não haja interesse em acoplamento de modos locais com os estruturais, o modelo de mola deve mostrar respostas razoáveis em pequenas deformações.

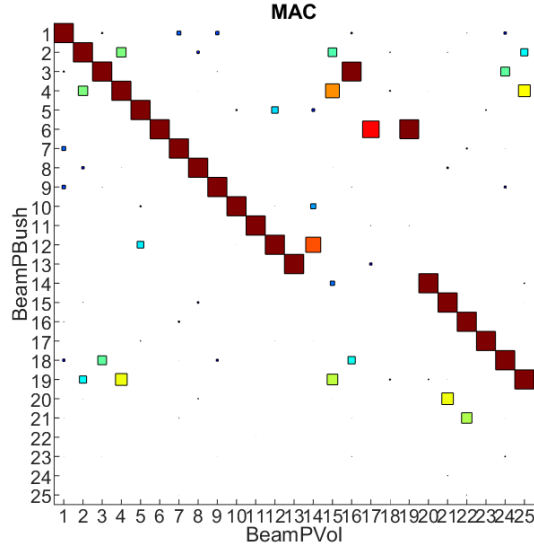


Figura 29 – Correlação entre os modos dos modelos [BeamPBush](#) e [BeamPVol](#)

3.2 Análises de resposta não linear

Depois de definir os modelos, sua resposta deve ser analisada com ênfase nas não linearidades. O objetivo dessa seção é de ilustrar de maneira compreensível tais efeitos em nível sistema.

Em um primeiro momento, são introduzidos conceitos de decomposições modais, para então adicionar uma componente cúbica na rigidez do modelo de mola. Após a análise das respostas, foi adicionado um modelo de amortecimento modal, e sua influência analisada. No final desta seção, são realizadas análises procurando respostas similares às dadas pelo método do balanço harmônico.

3.2.1 Amplitudes modais

Para estudar formas de visualizar o efeito das não linearidades no modelo, uma componente cúbica foi adicionada à rigidez da mola. Para estimar o valor desse coeficiente cúbico, foi definido que o modelo deveria responder com as partes linear e não linear com mesma intensidade para uma entrada unitária (neste caso, a entrada é a extensão do calço). Dessa maneira, o fator cúbico tem o mesmo valor numérico da rigidez linear.

Novamente, um teste de seno interrompido foi simulado, com excitação do terceiro modo linear, e a resposta temporal em cada grau de liberdade evidencia a presença de não linearidades, como pode-se ver na figura 30.

Para extrair dados mais sintéticos da resposta, foi realizada uma decomposição modal. Para os deslocamentos, pode-se definir as amplitudes modais, que demonstram relativamente o quanto um sistema se comporta em um determinado modo ([BIANCHI et al., 2010](#)). Definem-se essas amplitudes por

$$\{\alpha(t)\} = [M\Phi]^T \{q(t)\}, \quad (3.1)$$

com α as amplitudes modais, M , a matriz de massa, Φ a matriz da base modal utilizada, e q os deslocamentos.

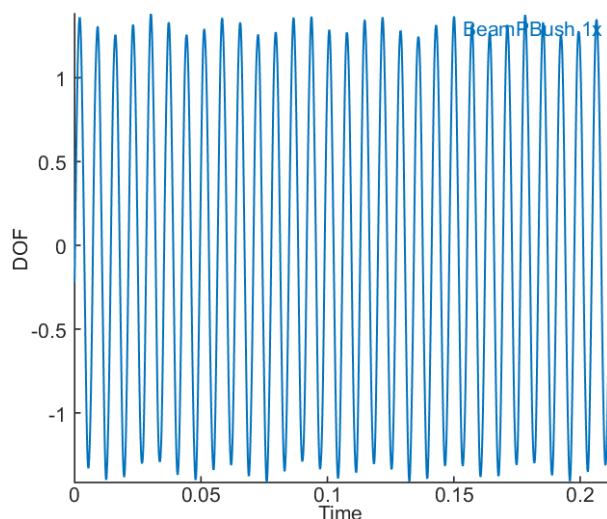


Figura 30 – Resposta temporal do deslocamento na extremidade do calço

O uso das amplitudes modais juntamente com suas derivadas, nos permite visualizar a resposta transiente na forma de diagramas de fase, como na figura 31, onde o terceiro modo mostra um comportamento bastante similar ao linear, enquanto modos superiores, como o sétimo, apresentam respostas praticamente ilegíveis.

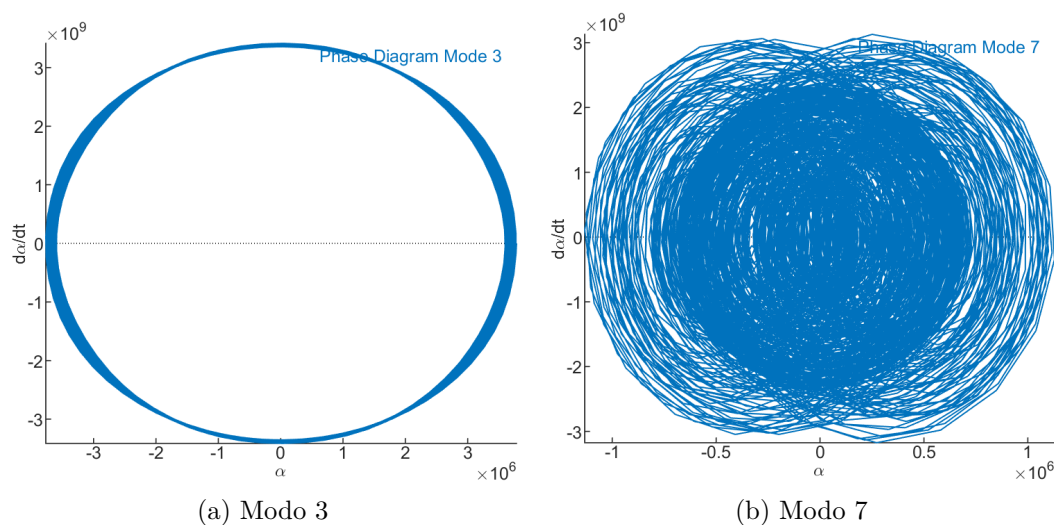


Figura 31 – Diagramas de fase das amplitudes modais do modelo [BeamPBush](#)

Para realizar simulações mais rapidamente, foi realizado também o cálculo utilizando uma base modal reduzida com 20 modos. Na figura 32 compara-se os resultados da amplitude do modo 7 e do modo 9 no domínio da frequência. Para uma leitura melhor, as frequências naturais são marcadas com pontos vermelhos e os harmônicos da excitação com traços pretos.

A figura 32 também mostra alguns aspectos que devem ser ressaltados. O primeiro aspecto é o deslocamento em frequência dos picos respostas para cada modo. Isso se deve à rigidificação induzida pelo aumento da amplitude, e será mais explorado na seção 3.2.3.

Outro aspecto é a aparição de reações em frequências bastante elevadas. Provavelmente isso ocorre devido ao fato de que o terceiro modo linear não representa um ciclo estável com uma rigidez cúbica, e dessa maneira, modos com elevada frequência são excitados pela condição inicial, além do fato de que na ausência de mecanismos de dissipação, esses modos seguem ativos. Um último aspecto é o fato de que o sétimo e o nono modos estão bem próximos de um dos harmônicos da frequência de excitação.

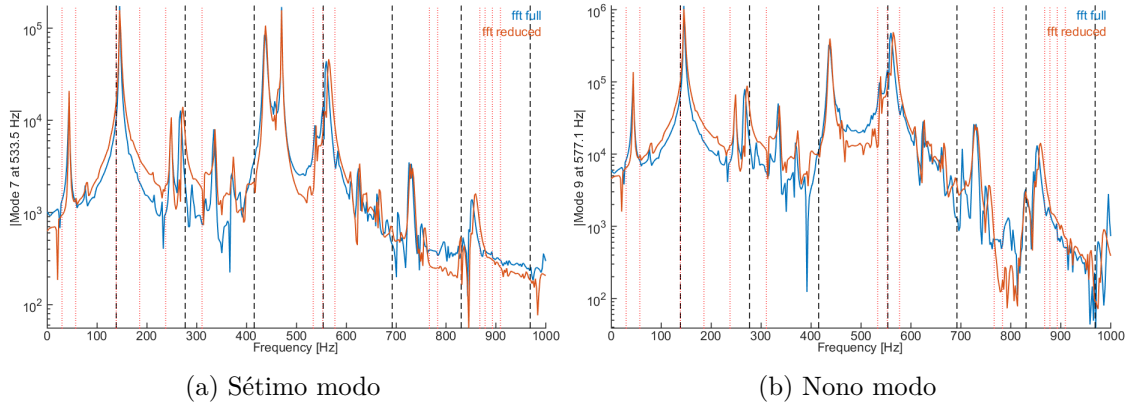


Figura 32 – Comparação entre o cálculo completo e o cálculo com redução modal para o modelo [BeamPBush](#) não linear

A utilização da redução modal reduz o tempo de cálculo em 3 vezes, sem degradação da resposta nos picos (apesar da perda de informação nos vales). Como não é interessante avaliar a resposta de baixas amplitudes em frequência, para os próximos cálculos este método foi utilizado.

Ao visualizar todas as amplitudes modais, é evidente que apenas alguns modos compõem a resposta. A figura 33 mostra que os modos que respondem com maior intensidade são os que deformam os calços (modos 1, 3, 7, 9, 13, 19). Neste exemplo particular, as maiores contribuições (com exceção do modo de excitação) provém do sétimo e do nono modos, provavelmente pelo fato de haver um harmônico da frequência de excitação bastante próximo a essas frequências. Outra consequência da rigidez cúbica adicionada é o aumento das frequências das ressonâncias modais, efeito que é mais intenso para frequências mais altas, e essas altas frequências exigem passos temporais de integração bastante pequenos.

3.2.2 Energias modais

Outra informação interessante que pode ser extraída da resposta temporal são as energias modais, que mostram quanto a energia se concentra em cada modo. De maneira similar às amplitudes modais, pode-se definir as energias modais por

$$E_m = \frac{1}{2} \left(\alpha_j(t) \phi_j^T K \alpha_j(t) \phi_j + \dot{\alpha}_j(t) \phi_j^T M \dot{\alpha}_j(t) \phi_j \right) = \frac{1}{2} \left(\omega_j^2 \alpha_j^2 + \dot{\alpha}_j^2 \right), \quad (3.2)$$

com E_m , a energia mecânica de cada modo, K , a matriz de rigidez e ω a frequência de cada modo.

A resposta da energia modal no tempo, vista na figura 34, mostra que para os modos não lineares, a energia apresenta variações intensas, especialmente para o modo 9. A periodicidade da resposta indica conservação de energia, pois não estão sendo consideradas

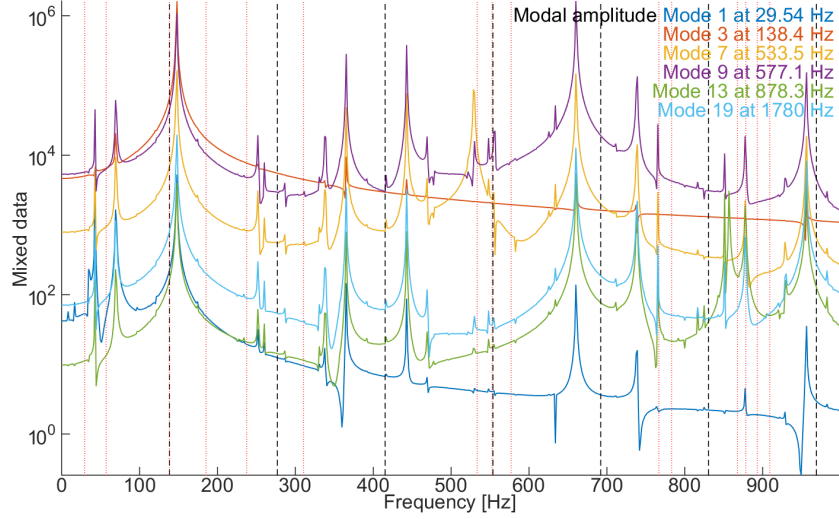


Figura 33 – FFT das amplitudes modais da resposta do modelo [BeamPBush](#)

formas de armazenamento de energia não lineares. Enquanto isso, o terceiro modo apresenta variações bastante suaves, bastante próximo de uma constante, que seria o comportamento para um sistema linear.

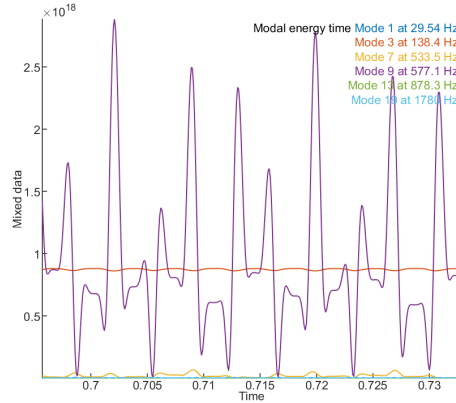


Figura 34 – Energias modais do modelo [BeamPBush](#) no tempo

A resposta em frequência, na figura 35 mostra que todos os modos apresentam um comportamento similar em frequência (apesar das amplitudes diferentes), exceto para o terceiro modo, que responde como se fosse um sistema linear.

3.2.3 Amortecimento modal

O próximo passo é a integração de um modelo de dissipação no sistema. Um modelo simples e realista de dissipação é o de amortecimento modal, onde a matriz de amortecimento viscoso na base modal é diagonal e constante (BIANCHI et al., 2010), e o coeficiente de amortecimento pode ser escolhido para cada modo, levando a

$$\Gamma = 2\text{diag}(\zeta_j \omega_j), \quad (3.3)$$

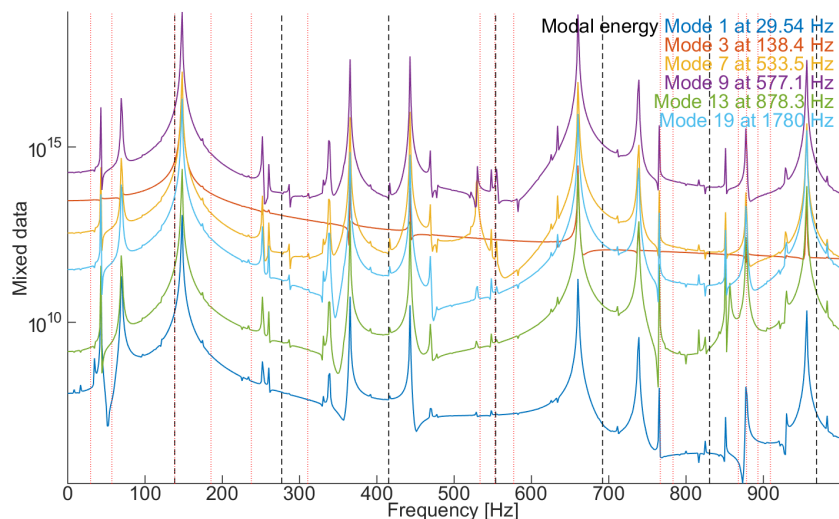


Figura 35 – FFT das energias modais do modelo [BeamPBush](#)

onde ζ_j é o coeficiente de amortecimento para o modo j , cuja frequência é ω_j . Esse modelo é razoável sob a hipótese de frequências separadas ([BALMES, 2017](#)).

O fator de amortecimento escolhido para o primeiro modo foi de 2% e para os outros modos, 0.1%. Além disso, antes do cálculo das respostas, foi introduzido um período de estabilização, onde um esforço senoidal é mantido na frequência do terceiro modo linear, na extremidade livre do sistema. Com esse procedimento, a condição inicial da simulação é um ciclo estável com forma similar à do terceiro modo, porém com componentes não lineares. Tal procedimento é impossível sem um modelo de dissipação.

Uma diferença notável trazida pelo amortecimento é que o deslocamento das frequências de ressonância se pronuncia mais, o que pode ser visto na figura 36. Além disso, estes picos de ressonância não mostram mais um comportamento simétrico em relação à ressonância, indicando que as não linearidades ganham importância com o efeito do amortecimento. A presença de outros modos de frequências mais altas é mais discreta, dando espaço ao aparecimento de harmônicos da frequência de excitação na resposta. Alguns picos de ressonância também ficaram mais largos, provavelmente devido aos efeitos de amplitude na frequência de resposta, o que deve ser analisado na seção 3.2.4.

A resposta da energia temporal, vista na figura 37, mostra uma participação bastante intensa do modo 19, com um decaimento bastante rápido. No gráfico da figura 38, pode-se ver que enquanto a resposta do modo 19 decai, a resposta do modo 9 aumenta, de maneira que a energia seja transferida do modo de frequência mais alta para o de frequência mais baixa, onde é dissipada. Além disso, existe uma oposição de fase entre a energia presente no modo 3 e todos os outros modos, o que indica que as respostas linear e não linear se alternam com a deflexão do elemento [cbush](#).

Em um modelo linear com amortecimento, espera-se que a energia seja monotonicamente decrescente com o tempo, e com derivada nula apenas nos momentos onde a velocidade é nula. Contudo, no modelo utilizado nesta seção, existe uma fração da energia que é armazenada na mola não linear, e dessa maneira, mesmo o terceiro modo (que apresenta comportamento muito próximo ao linear) apresenta oscilações, o que se pode ver na figura 38. Os outros modos apresentam intensas oscilações com seus picos coincidindo

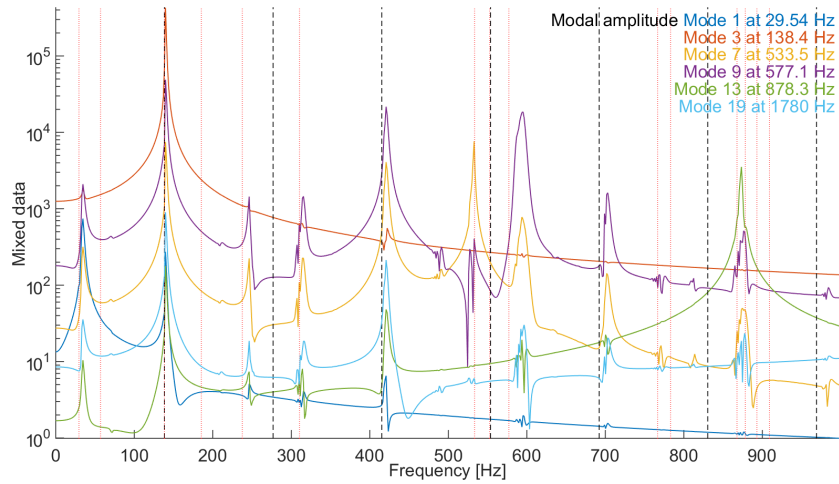


Figura 36 – Amplitudes modais em frequência para o modelo **BeamPBush** amortecido

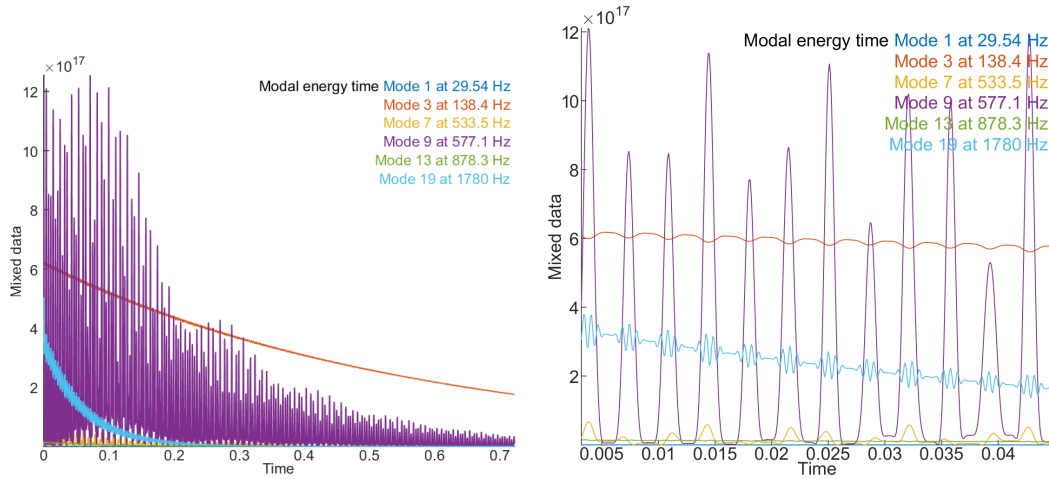


Figura 37 – Resposta temporal da energia para o modelo **BeamPBush** amortecido

com os vales do terceiro modo. Isso indica que a não linearidade é o fator que excita os outros modos. Para um intervalo de tempo maior, o sistema se comporta de maneira similar a um sistema linear, onde o único componente que influencia a resposta é o terceiro modo.

Para ilustrar a interação tempo/frequência, o espectrograma para cada amplitude modal foi calculado, com a utilização da transformada de Fourier de tempo curto (STFT), utilizando a janela de Hamming (ZHIVOMIROV, 2009). O espectrograma do nono modo, na figura 39, mostra que a frequência das respostas caem rapidamente com o tempo. Este fenômeno está relacionado com a queda das amplitudes da resposta, visto que a rigidez do modelo (e, por consequência, suas frequências naturais) são sensíveis a amplitude.

3.2.4 Resultados do método do balanço harmônico

A formulação do método do balanço harmônico supõe que o sistema apresente uma resposta periódica do sistema quando sujeito a um determinado carregamento, o que é uma hipótese bastante abrangente para um sistema amortecido. Um solver que utiliza

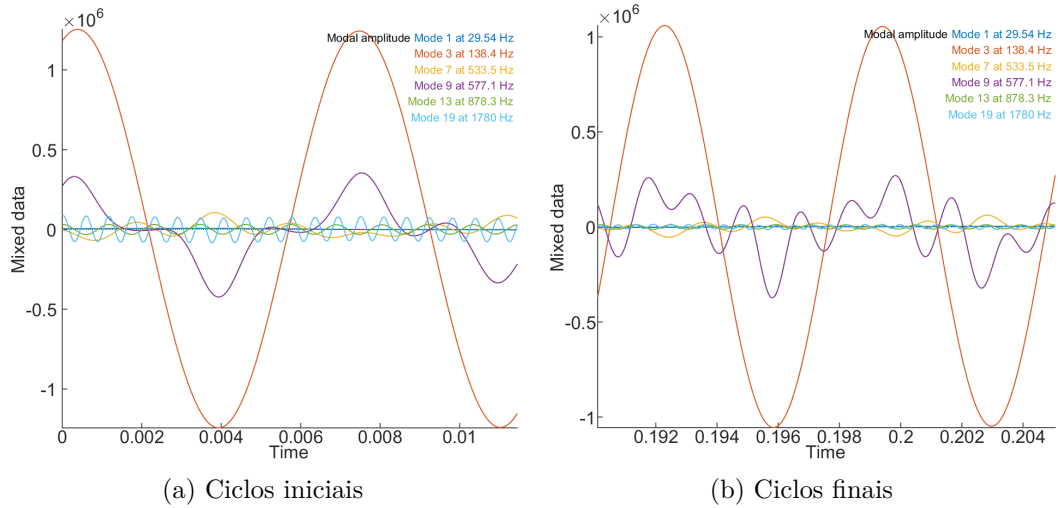


Figura 38 – Amplitudes modais no tempo para o modelo [BeamPBush](#)

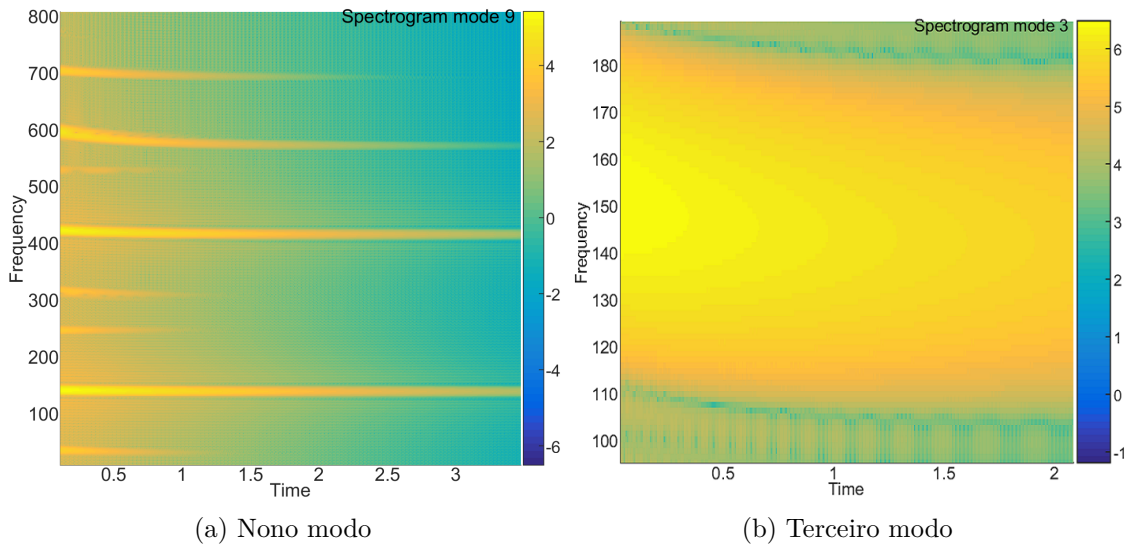


Figura 39 – Espectrogramas da resposta do modelo [BeamPBush](#)

este método resolve as equações dinâmicas através dos coeficientes de Fourier da resposta, utilizando como frequências os harmônicos e sub harmônicos da frequência de excitação. Dessa maneira, este método resolve apenas o ciclo de regime permanente de um sistema ([JAUMOUILLE, 2011](#)). Nessa seção, um esforço senoidal foi imposto na extremidade livre do modelo, então o sistema foi simulado até a estabilização do ciclo, de onde extraiu-se a amplitude. Este método deve fornecer as mesmas respostas que um solver de balanço harmônico pode fornecer (amplitude da resposta em função da frequência de excitação), e tais resultados servem como comparação e verificação de implementação para outros projetos da SDTools.

Em cada simulação temporal, um ponto do espectro de frequência é estudado. Como o interesse de um problema de vibrações é voltado para as ressonâncias, neste caso, a análise se restringiu à ressonância do terceiro modo (em torno de 140Hz), além do nono

modo (em torno de 570Hz). Antes de realizar a série de análises temporais, deve-se atentar ao fato do sistema atingir ou não um ciclo estável. A figura 40 mostra a resposta para diferentes frequências, onde uma delas já atingiu a estabilidade, porém a outra não. Para evitar a utilização de tempos de integração muito grandes, tais erros foram ignorados.

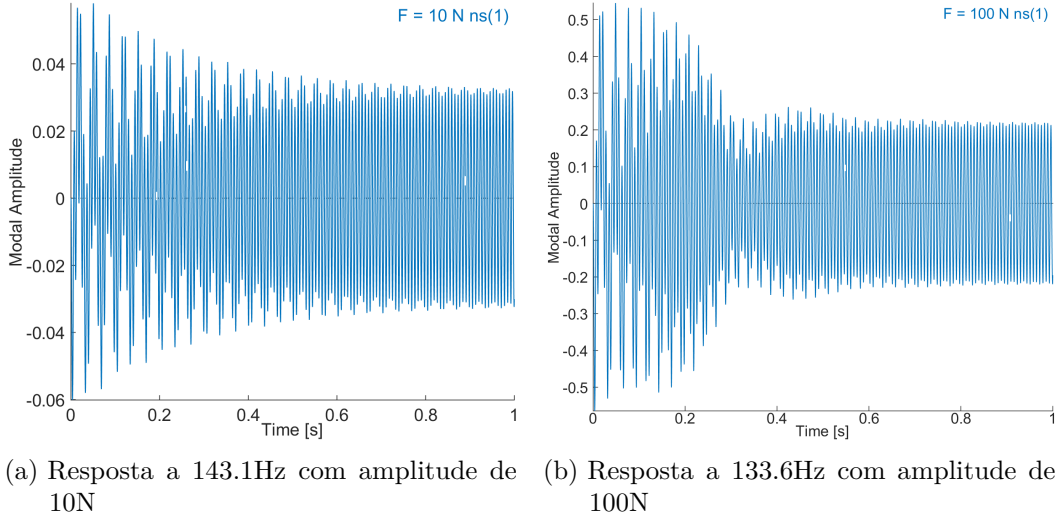


Figura 40 – Resposta temporal do modelo [BeamPBush](#) para frequências e amplitudes diferentes

Variando amplitude e frequência, foram realizadas numerosas simulações. Para chegar a um ciclo estável mais rapidamente, o amortecimento modal foi elevado a 1%. Os resultados obtidos, mostrados na figura 42 são bastante similares aos resultados da equação de Duffing, com um salto de amplitude em relação à frequência, e esse efeito de salto se torna mais pronunciado com maiores amplitudes de esforços. Ao simular para frequências próximas do nono modo, nota-se que existe um deslocamento do pico de ressonância na frequência, visto na figura 41.

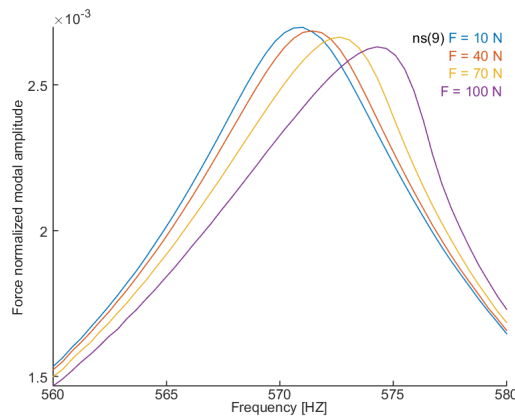


Figura 41 – Variação da frequência do nono modo com o aumento da amplitude

É interessante notar que o salto ocorre para frequências próximas à frequência de excitação de maneira evidente, como se vê na figura 42 para as terceira e nona amplitudes modais, porém não ocorre para frequências mais elevadas.

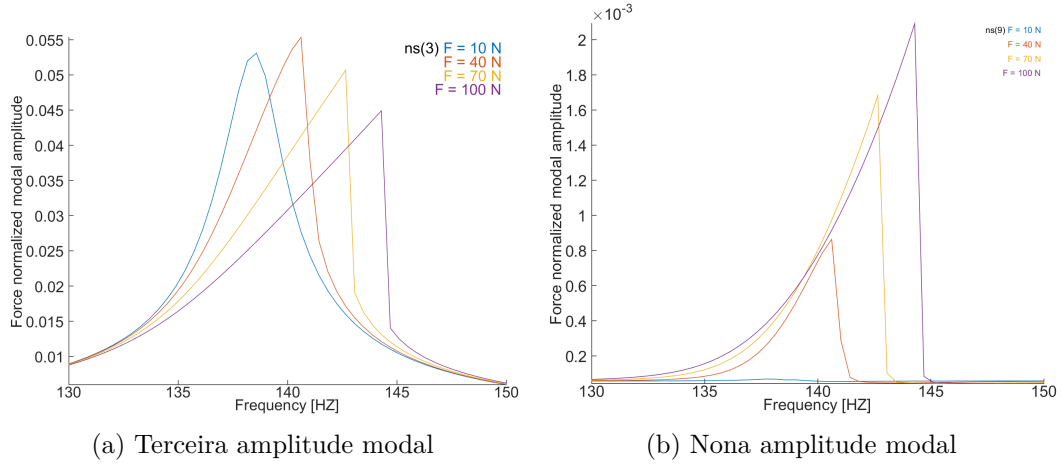


Figura 42 – Resposta harmônica do modelo **BeamPBush** para diferentes amplitudes

Um salto similar pode ser visto com o aumento do coeficiente cúbico, na figura 43. No entanto, o comportamento não apresenta a linearidade observada com o aumento da amplitude.

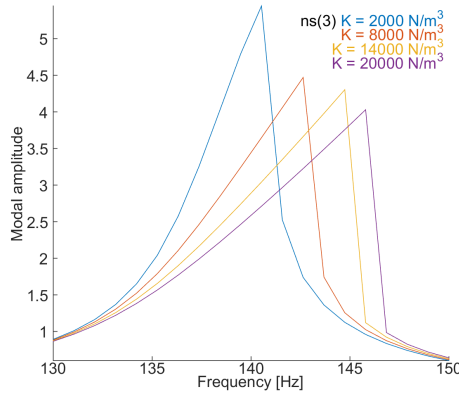


Figura 43 – Resposta harmônica do modelo **BeamPBush** para diferentes valores do coeficiente cúbico

3.3 Modelo volumétrico e metamodelos

Nesta seção, as relações entre os metamodelos e os modelos volumétricos são estabelecidas, ao integrar o modelo volumétrico ao sistema analisado na seção 3.

O objetivo é estabelecer modelos equivalentes tanto partindo do modelo volumétrico, quanto partindo do metamodelo, além de analisar suas diferenças.

3.3.1 Identificação de metamodelo

Nesta seção, o sistema com o modelo volumétrico é substituído por sua mola não linear equivalente, calculada na seção 2.2.4. No entanto, para uma representação de um modelo hiperelástico, a rigidez linear não é suficiente para representar a variação de rigidez

no calço com a amplitude, então, a partir da resposta do modelo volumétrico, foi calculada uma regressão quadrática para representar essa variação de rigidez. A figura 44 mostra a evolução da rigidez com o deslocamento da mola.

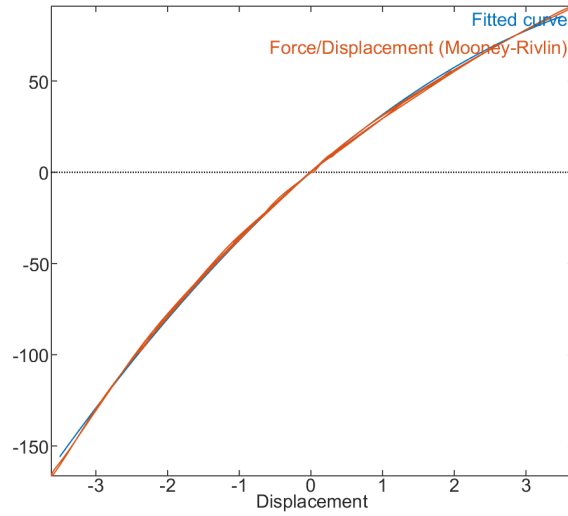


Figura 44 – Regressão quadrática da relação de força/deslocamento do modelo volumétrico

Para simular um modelo realista, um modelo de dissipação deve ser levado em conta. No entanto, como temos de calcular um esforço resultante, a utilização de uma base reduzida (que introduz resíduos em deslocamentos) juntamente com ligações rígidas não pode ser utilizada, pois resulta em esforços infinitos. Dessa maneira, ao invés de utilizar o modelo de amortecimento modal, que é impraticável sem a redução modal, o modelo de amortecimento utilizado foi o de Rayleigh. Neste modelo, a matriz de amortecimento Γ é uma combinação linear da matriz de rigidez K e da matriz de massa M , de forma que

$$\Gamma = \alpha M + \beta K, \quad (3.4)$$

onde α e β são os parâmetros de amortecimento.

Nas mesmas condições da seção 3.2.3, foi realizado um teste de seno interrompido, tanto para o modelo volumétrico quanto para o metamodelo. As respostas foram passadas para o domínio da frequência, e, comparando os resultados, vistos na figura 47, pode-se ver que as respostas são bastante similares, exceto por um pico em torno de 410Hz que corresponde ao terceiro harmônico da frequência de excitação.

Investigando as respostas modais do modelo volumétrico em frequência, o único modo que mostra um grande pico nesta frequência é o modo 24, cuja forma consiste no cisalhamento localizado no calço. Deve-se frisar que mesmo que o metamodelo também apresente um modo bastante similar, este modo não se manifesta na resposta.

Em relação aos modos locais, o décimo sexto modo possui uma influência significativa na resposta do modelo volumétrico, mesmo não tendo um modo equivalente no metamodelo. Estes modos são mostrados na figura 47.

3.3.2 Identificação de parâmetros

Resolvendo o problema inverso, deve-se ser capaz de estimar os parâmetros do material em função de uma resposta global. Para encontrar os parâmetros que melhor

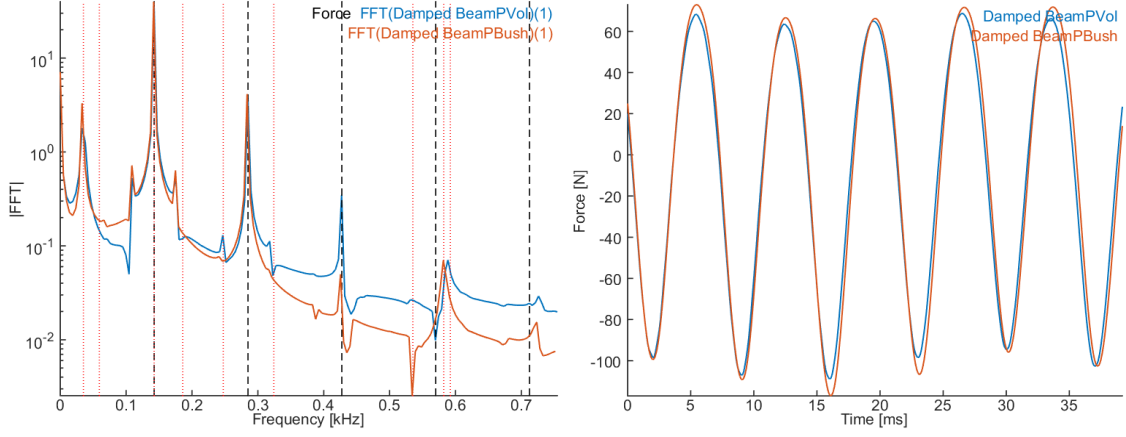


Figura 45 – Comparação entre os esforços resultantes dos modelos [BeamPBush](#) e [BeamPVol](#), nos domínios do tempo e da frequência

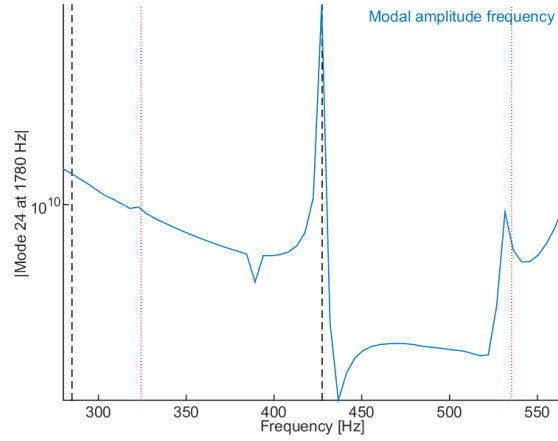


Figura 46 – Resposta da vigésima quarta amplitude modal

representam uma resposta, deve-se resolver um problema clássico de otimização. A função custo definida para a identificação realizada nesta seção foi o quadrado da diferença entre uma resposta alvo e a resposta obtida com o atual conjunto de parâmetros,

$$\chi = \int_{t=0}^{t=t_{cycle}} (F_{res}(C_1, C_2, K) - F_{obj})^2 dt, \quad (3.5)$$

onde χ é a função custo, F_{res} é a força resultante calculada pela análise de elementos finitos, e F_{obj} é a função que descreve a resposta que deseja-se obter com um conjunto de parâmetros.

A maneira mais simples para resolver este problema é o método do gradiente de descida, onde o passo de otimização é tomado na direção oposta ao gradiente da função custo. Cada passo de otimização incrementa os parâmetros de Δp ,

$$\Delta p = \alpha \frac{\partial \chi}{\partial p} \chi, \quad (3.6)$$

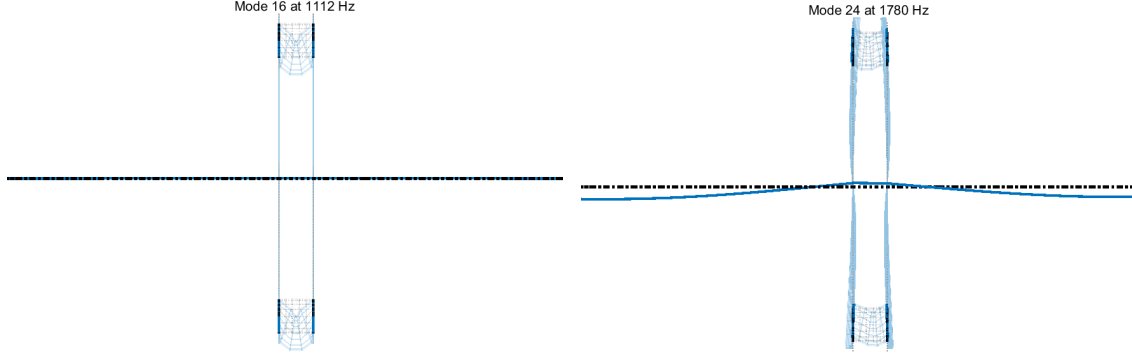


Figura 47 – Modos presentes na resposta do modelo [BeamPVol](#) e ausentes na resposta do modelo [BeamPBush](#)

onde α é o raio do passo e

$$p = \begin{cases} C_1 \\ C_2 \\ K \end{cases} \quad (3.7)$$

Uma maneira mais eficiente de realizar esta otimização é o método de Gauss-Newton, que também utiliza a direção oposta ao gradiente, porém com o uso de um multiplicador que garante convergência quadrática perto de um mínimo local. Cada passo de otimização nesse método pode ser descrito por

$$\Delta p = \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}^T W \frac{\partial \chi}{\partial p} \right)^{-1} \frac{\partial \chi}{\partial p} W \chi, \quad (3.8)$$

onde W é a matriz diagonal com os pesos da derivada de cada parâmetro. Como a função custo definida é mais insensível ao parâmetro K do que aos outros, seu fator de peso foi definido 4, enquanto C_1 e C_2 tiveram o peso definido como 1.

Uma outra formulação é o método de Levenberg-Marquardt, que é um híbrido entre os outros métodos apresentados, que dependendo dos parâmetros adotados apresenta maior robustez que os anteriores. Cada passo pode ser descrito por

$$\Delta p = \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}^T W \frac{\partial \chi}{\partial p} + \lambda I \right)^{-1} \frac{\partial \chi}{\partial p} W \chi. \quad (3.9)$$

Pode-se notar que quando o parâmetro do método λ tende a zero, o método é equivalente ao de Gauss-Newton, enquanto grandes valores fazem o método ser equivalente ao gradiente de descida. Este método é útil quando tomado em sua forma adaptativa, onde λ evolui ao longo das iterações saindo do método do gradiente de descida em direção ao método de Gauss-Newton ([GAVIN, 2017](#)).

Para aplicar esses métodos, o modelo descrito na seção 2.2 foi escolhido, devido à sua simplicidade. Novamente as condições de contorno são o engaste em uma das faces e a outra extremidade livre. As condição inicial é a deformação do calço na forma de seu terceiro modo (equivalente a sua extensão, visto na figura 48). Nessas condições, os esforços resultantes foram calculados para um ciclo.

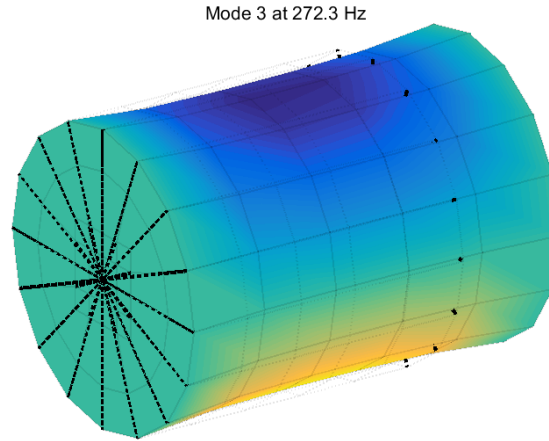


Figura 48 – Condições iniciais para o procedimento de otimização

A função escolhida como referência é uma cossenoide, com frequência e amplitude diferentes da resposta dada pelo modelo anteriormente descrito. A derivada da função custo foi estimada pelo método das diferenças finitas tomado à direita (ao invés de centralizado) para evitar a avaliação da função custo duas vezes por derivada. A inicialização tomou valores com a mesma ordem de grandeza dos parâmetros finais. Na figura 49 é possível ver a resposta antes (em azul) e depois (em laranja) dos processos de otimização, além da função objetivo (em amarelo).

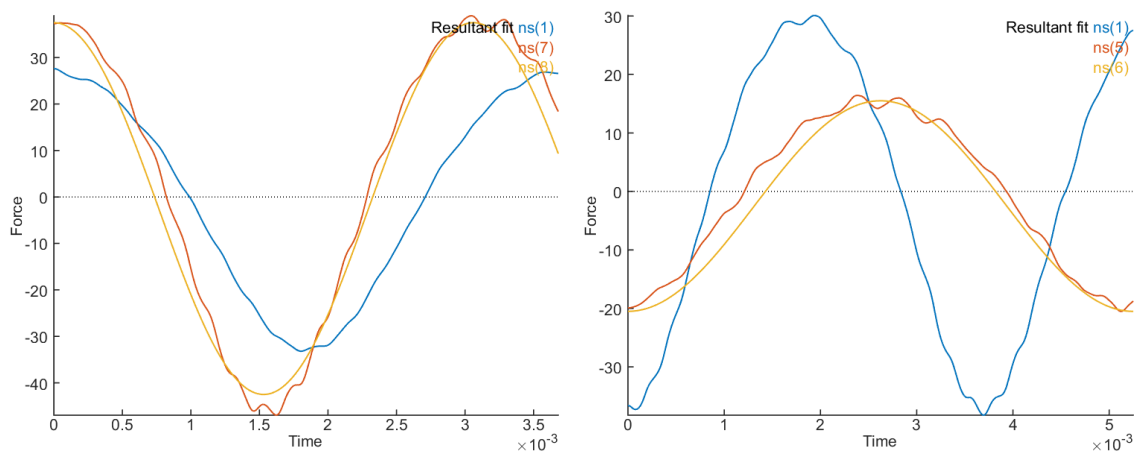


Figura 49 – Primeiro e último passos da identificação de parâmetros

O procedimento de otimização usado foi o método de Gauss-Newton, visto que os valores iniciais possuíam a mesma ordem de grandeza dos parâmetros ótimos, logo a convergência quadrática era garantida. Durante os cálculos, também foi notado que a convergência do método de otimização é fortemente dependente dos parâmetros de inicialização e dos pesos atribuídos.

4 Conclusão

A implementação de uma arquitetura de resolução de problemas de hiperelasticidade mostra a capacidade de adaptar o software para poder resolver problemas mais complexos. Além disso, a possibilidade de resolver os problemas de identificação e de validação (os mais comuns, quando se trata de um projeto mecânico), além do diagnóstico da patologia do modelo, demonstra que o programa é flexível o bastante para aplicações em escala industrial.

A aplicação de conceitos não tão usuais para o pós processamento, como a decomposição em valores singulares e a extração de dados intermediários de cálculo, por exemplo, proporcionou um aprofundamento maior no que tange as não linearidades.

Apesar do conhecimento trazido por este trabalho, ainda existem algumas limitações que devem ser levadas em conta para aplicações futuras. Entre elas estão a adoção de não linearidades que envolvem estados internos. Sua adoção é bastante delicada, pois exigiria procedimentos de cálculos completamente diferentes, sendo necessárias grandes mudanças de arquitetura. A adoção desse tipo de elemento não linear é crucial para a aplicação de leis de dissipação que representam bem a realidade. Outra limitação do trabalho é a ausência de dados experimentais, tanto devido à falta de um modelo dissipativo realista quanto pela falta de recursos para sua realização.

Tendo em vista que realizaram-se estudos em uma larga gama de possíveis aplicações (correlação entre teste e ensaio, validação, hiper redução, etc.), este trabalho pode ser continuado em diversas áreas sendo uma sólida base, visto que a necessidade de representações não lineares para esse tipo de problema foi comprovada.

Referências

- ABAQUS. *Abaqus Benchmarks Guide*. 2017. Disponível em: <<http://129.97.46.200:2080/v6.13/books/bmk/default.htm?startat=ch03s01ach169.html>>. 23
- ADINA. *Instability of Two-Term Mooney-Rivlin Model*. [S.l.], 2007. Disponível em: <<http://www.adina.com/newsgH48.shtml>>. 23
- ANSYS. *ANSYS Documentation*. ANSYS, Inc., 2017. Disponível em: <<http://148.204.81.206/Ansys/readme.html>>. 12, 35
- ARLAUD, E. *Modèles dynamiques réduits de milieux périodiques par morceaux : application aux voies ferroviaires*. Tese (phdthesis) — Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM, dez. 2016. Disponível em: <<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-01455077/document>>. 9
- BALMES, E. *SDTools User's Guide*. [S.l.: s.n.], 2017. 12, 14, 16, 44
- BANKS, H. T.; HU, S.; KENZ, Z. R. *A brief review of elasticity and viscoelasticity*. [S.l.], 2010. Disponível em: <<https://www.ncsu.edu/crsc/reports/ftp/pdf/crsc-tr10-08.pdf>>. 30
- BIANCHI, J. P. et al. Using modal damping for full model transient analysis. Application to pantograph/catenary vibration. In: *ISMA*. Leuven, Belgium: [s.n.], 2010. p. 376. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00589953>>. 40, 43
- BOULANGER, P.; HAYES, M. Finite-Amplitude Waves in Mooney-Rivlin and Hadamard Materials. In: . Vienna: Springer, 2001. v. 424. Disponível em: <http://download.springer.com/static/pdf/565/chp%253A10.1007%252F978-3-7091-2582-3_4.pdf?originUrl=http%3A%2F%2Flink.springer.com%2Fchapter%2F10.1007%2F978-3-7091-2582-3_4&token2=exp=1490364763~acl=%2Fstatic%2Fpdf%2F565%2Fchp%25253A10.1007%25252F978-3-7091-2582-3_4.pdf%3ForiginUrl%3Dhttp%253A%252F%252Flink.springer.com%252Fchapter%252F10.1007%252F978-3-7091-2582-3_4*~hmac=ae0ad7a25c4dac014967914c24a245499f97be62be09232f411d29d4c4a0547e>. 13
- BOURGETEAU, B. *Modélisation numérique des articulations en caoutchouc de la liaison au sol automobile en simulation multi-corps transitoire*. Tese (Doutorado) — Ecole Centrale Paris, 2009. 9, 12, 36
- BOWER, A. *Applied Mechanics of Solids*. [S.l.]: CRC Press, 2009. ISBN 978-1-4398-0247-2. 12, 13, 17
- BRINSON, L. B. H. *Polymer Engineering Science and Viscoelasticity - An Introduction*. Springer, 2008. ISBN 978-0-387-73860-4. Disponível em: <<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-0-387-73861-1.pdf>>. 34, 35
- DION, J.-L.; CHEVALLIER, G.; PEYRET, N. Improvement of measurement techniques for damping induced by micro-sliding. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 34, n. 1–2, p. 106–115, jan. 2013. ISSN 0888-3270. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327012003093>>. 39

GAVIN, H. *The Levenberg-Marquardt method for nonlinear least squares curve-fitting problems*. 2017. Disponível em: <<http://people.duke.edu/~hpgavin/ce281/lm.pdf>>. 51

HAMMAMI, C. *Intégration de modèles de jonctions dissipatives dans la conception vibratoire de structures amorties*. Tese (Doutorado) — Arts et Metiers ParisTech, Paris, out. 2014. Disponível em: <<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01087150v1>>. 37

ISAYEV, A. I. Glass-Transition Phenomena in Polymer Blends. In: *Encyclopedia of Polymer Blends*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2014. ISBN 978-3-527-31931-2. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/303857738_Glass-Transition_Phenomena_in_Polymer_Blends>. 35

JAUMOUILLE, V. *Dynamique des structures à interfaces non linéaires : Extension des techniques de balance harmonique*. Tese (phdthesis) — Ecole Centrale de Lyon, mar. 2011. Disponível em: <<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00670283/document>>. 9, 46

JAUMOUILLE, V.; SINOUE, J.-J.; PETITJEAN, B. An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems. Application to bolted structures. *Journal of Sound and Vibration*, v. 329, p. 4048–4067, 2010. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00625097>>. 9, 33, 34, 35

JOHANSSON, H.; RUNESSON, K. Calibration of the Bergström-Boyce model: Explicit expressions. 2005. ISSN 1652-8557. Disponível em: <<http://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/9342.pdf>>. 35

NIROOMANDI, S. et al. Model order reduction for hyperelastic materials. *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING*, maio 2009. Disponível em: <<http://amb.unizar.es/PDFs/Kirchhoff-SaintVenant.pdf>>. 29

PARK, S. W.; SCHAPERLY, R. A. Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part I—a numerical method based on Prony series. *International Journal of Solids and Structures*, v. 36, n. 11, p. 1653–1675, abr. 1999. ISSN 0020-7683. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768398000559>>. 34

PAULSTRA. *Paulstra Catalog*. [S.l.: s.n.], 2017. 22

RYCKELYNCK, D.; BENZIANE, D. M. Multi-level A Priori Hyper-Reduction of mechanical models involving internal variables. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, n. 17–20, p. 1134–1142, mar. 2010. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782509004022>>. 9

SCHRODER, J.; NEFF, P. Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions. *International Journal of Solids and Structures*, v. 40, n. 2, p. 401–445, jan. 2003. ISSN 0020-7683. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768302004584>>. 13

VINCENT, F. *Du modèle matériau à la mécanique des systèmes : étude dynamique d'une liaison souple en silicone chargée de silice*. Tese (Doutorado) — École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2011. Disponível em: <<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00584332>>. 9

ZHIVOMIROV, H. *Short-Time Fourier Transformation (STFT) with Matlab Implementation - File Exchange - MATLAB Central*. 2009.

Disponível em: <<http://fr.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/45197-short-time-fourier-transformation--stft--with-matlab-implementation?focused=7566419&tab=function>>. 45